

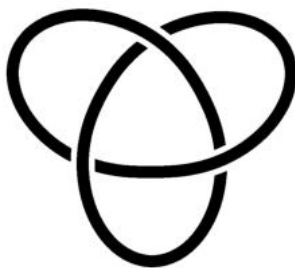
Coleção Palavra de Educador(a)

Uma Breve Introdução à
Teoria dos
NÓS
com Sugestões para o
Ensino Básico

José Edi-Ackel Santos

 Editora
SEDUC

*Uma Breve Introdução à Teoria dos Nós
com Sugestões para o Ensino Básico*



José Edi-Ackel Santos



Editora
SEDUC

SECRETARIA DE ESTADO
DA EDUCAÇÃO, DO ESPORTE
E DA CULTURA



SERGIPE
GOVERNO DO ESTADO

GOVERNADOR DO ESTADO DE SERGIPE

Belivaldo Chagas Silva

VICE-GOVERNADORA DO ESTADO DE SERGIPE

Eliane Aquino Custódio

SECRETÁRIO DE ESTADO DA EDUCAÇÃO, DO ESPORTE E DA CULTURA

Josué Modesto dos Passos Subrinho

SUPERINTENDENTE EXECUTIVO DE EDUCAÇÃO

José Ricardo de Santana

SUPERINTENDENTE ESPECIAL DE ESPORTE

Mariana Dantas Mendonça Gois

Coordenador do Programa Editorial da SEDUC

Sidiney Menezes Gerônimo

Assessor Administrativo do Programa Editorial da SEDUC:

Jonas José de Matos Neto

Membros do Conselho Editorial:

Josué Modesto dos Passos Subrinho (Presidente), Sidiney Menezes Gerônimo (Coordenador), Simone Paixão Rodrigues, Rosemeire Marcedo Costa, Eliana Midori Sussuchi, Débora Evangelista Reis Oliveira, Roberto Jerônimo dos Santos Silva, Aglaé D'Ávila Fontes.

Uma Breve Introdução à Teoria dos Nós com Sugestões para o Ensino Básico

Ilustração: José Edi-Ackel Santos

Capa: Russel Petresson Bezerra Oliveira

Diagramação: José Edi-Ackel Santos

Revisão Ortográfica: Clezimary do Nascimento

Editora SEDUC – 2021

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)

Santos, José Edi-Ackel

S237b

Uma breve introdução à teoria dos nós com sugestões para o ensino básico / José Edi-Ackel Santos. – Aracaju : Editora SEDUC, 2021.
120 f. : il. color – (Coleção Palavra de Educador (a))

ISBN: 978-65-5371-001-6

1. Teoria dos nós. 2. Matemática Aplicada. 2. Educação Matemática - Ensino básico. 3. Ensino Fundamental e Médio. I. Santos, José Edi-Ackel. II. Título.

CDU: 515.162:373.3

Ficha elaborada pela bibliotecária Ma. Isis Carolina Garcia Bispo – CRB-2037

O Programa Editorial da SEDUC

O Programa Editorial da Secretaria de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura - SEDUC/SE apresenta à sociedade os livros produzidos por estudantes, professores(as), profissionais de gestão e pesquisadores(as) em geral, envolvidos(as) com as redes públicas estadual e municipais da educação sergipana. O lançamento dessas obras sinaliza para a concretização de metas estabelecidas no **Plano de Governo Pra Sergipe Avançar (2019-2022)**, cuja execução contou com a participação do Conselho Editorial da SEDUC, de representantes das comunidades escolares e das academias de letras locais. O resultado dessa construção coletiva está materializado nas **Coleções de livros** do Programa Editorial da SEDUC.

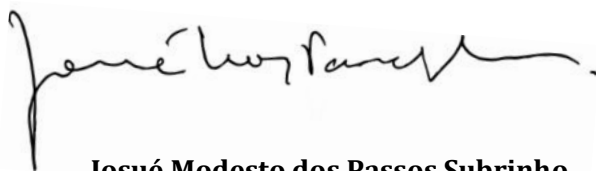
A magia de escrever e desenhar é a coleção que cultiva o jardim das primeiras letras, cuidando carinhosamente do processo de alfabetização. A coleção **Estudante escritor(a)** cuida de cada palavra como flor do processo de letramento, que evolui junto com nossos(as) estudantes dos ensinos fundamental e médio.

Já a coleção **Palavra de Educador(a)** transforma dissertações e teses em livros científicos, bem como publica as aventuras docentes pelo universo literário. A coleção **Saberes em**

gestão educacional, por sua vez, abriga a produção dos(as) profissionais de gestão que atuam nas estruturas administrativas da SEDUC e das Secretarias Municipais de Educação - SEMEDs.

Histórias de Sergipe é o nome da coleção responsável pela preservação da memória sergipana, ao passo que a coleção **Paradidáticos sergipanos** gesta material de apoio didático para todos os componentes curriculares da educação básica. Por fim, a coleção **Autores(as) da inclusão** abraça as criações de estudantes com deficiência no âmbito da educação pública do nosso Estado.

Espera-se que, a cada ano letivo, um novo empreendimento editorial seja divulgado, a fim de que as comunidades escolares possam desenvolver uma cultura escolar do hábito da leitura e da produção da escrita.



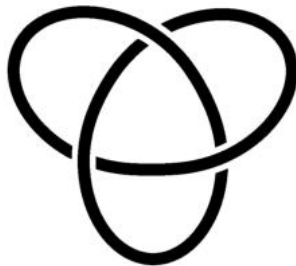
Josué Modesto dos Passos Subrinho
Secretário de Estado da Educação, do Esporte e da Cultura

O Autor

Professor MSc. José Edi-Ackel Santos

- Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT);
- Especialista em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe;
- Professor Efetivo da Rede Pública de Ensino do Estado de Sergipe;
- Editor/Diagramador de livros e textos científicos em Matemática com \LaTeX ;
- Coordenador da OBMEP no CEMAN.

Ao meu filho Antonio
Ao meu pai Antônio (in memoriam)



Agradecimentos

A Jesus Cristo, nosso Pai, por nos conduzir e proteger sempre. A meu Pai Antônio (*in memoriam*) por seu inigualável legado de força, bravura e honra. No céu, os anjos proferirão as palavras deste livro para você meu Pai amado. A minha Mãe Valdeci, Professora aposentada, por me ensinar os primeiros rabiscos com giz no chão da escolinha da Porfia. A meu filho Antonio, fonte infindável e onipresente de luz e inspiração. A minha esposa Mayara, pela parceria e dedicação. Ao Professor Dr. David Soares Pinto Júnior, orientador na especialização, amigo e referencial, a quem devo grandes aprendizados na Matemática e na editoração L^AT_EX. Ao Professor Dr. Kalasas Vasconcelos de Araújo, orientador no mestrado, que me apresentou a Teoria dos Nós e contribuiu generosamente para minha formação. A toda equipe do Programa Editorial da Seduc. Aos professores do CEMAN, amigos(as) valiosos(as) que dividem comigo as dificuldades e conquistas da jornada docente. Aos alunos que, euforicamente, participaram do grupo de estudos da Teoria dos Nós. Ao Colégio Estadual Manoel Alcino do Nascimento em Graccho Cardoso-SE, que me recebeu no Ensino Fundamental como aluno e, anos depois, como Professor.



Prefácio

No decorrer de nossas tarefas diárias, nos deparamos com situações corriqueiras que envolvem nós, tais como amarrar os cadarços de sapatos, gravatas, realizar tarefas com cordas no campo, etc. Entretanto, no rigor do domínio matemático, o estudo dos nós não trata desses supracitados que, em geral, possuem extremidades desconexas. Para a definição topológica, um nó não pode possuir pontas soltas.

Durante muitos anos diversos cientistas achavam que os nós pertenciam à Matemática Pura, com a inexistência de aplicações práticas. Contudo, à medida que as pesquisas científicas avançaram, demonstrou-se que os nós pertencem à Matemática Aplicada. Em 1973, o matemático inglês John Conway (★1937, †2020) sugeriu um experimento imaginário no qual realizava a alteração dos cruzamentos de um nó cortando e colando os fios. Tais movimentos assemelham-se a alguns que ocorrem nas cadeias do DNA. As pesquisas também indica-

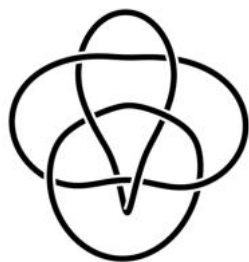
ram aplicações da Teoria dos Nós na Física Quântica.

É importante ter ciência de que estudar nós não é tarefa fácil, pois algumas características ainda não foram completamente compreendidas. Não sabemos, por exemplo, se é possível colocá-los em ordem crescente ou se existe uma forma de diferenciá-los em sua totalidade. Por outro lado, sabe-se que algumas de suas propriedades assemelham-se às observadas nos números. Horst Schubert (★1919, †2001), matemático alemão, descobriu no final dos anos 1940 que uma soma conexa nodal apresenta similaridades com a multiplicação numérica. Exemplificativamente, um nó trivial é diluído numa composição com outro nó sem alterá-lo, desempenhando tarefa análoga à do número 1 na condição de elemento neutro da multiplicação. Além disso, os nós também podem ser fatorados em primos ou compostos, assim como ocorre com os números.

O matemático alemão Kurt Reidemeister (★1893, †1971) contribuiu decisivamente para o avanço do estudo dos nós com sua ideia de projetar a estrutura tridimensional no plano para formar diagramas, sobre os quais é possível aplicar movimentos capazes de realizar deformações na busca de equivalências e, conseqüentemente, permitir a tabulação que é o grande objetivo da teoria.

No capítulo 1 deste livro trataremos brevemente do de-

envolvimento histórico, ressaltando contribuições dadas por diversos cientistas. No segundo capítulo serão inseridos os conceitos fundamentais, a saber, definição de nó, isotopia ambiente, movimentos de Reidemeister, primalidade, operações de soma conexa, inversão, quiralidade entre outros. No terceiro capítulo apresentaremos os invariantes, que são recursos matemáticos capazes de verificar equivalências. No quarto e último capítulo, este livro assume um caráter mais didático, voltado ao ensino básico. Nele, construiremos algumas sugestões de aulas para o Ensino Fundamental e Médio, decorrentes de uma bem-sucedida experiência realizada por este autor em parceria com alunos do Colégio Estadual Manoel Alcino do Nascimento, em Graccho Cardoso - Sergipe, onde há alguns anos formou-se um grupo de estudos sobre a Teoria dos Nós que demonstrou a viabilidade didático-pedagógica do tema.



Sumário

Prefácio	9
1 Um Breve Histórico da Teoria dos Nós	17
1.1 Carl Friedrich Gauss	18
1.2 Johann Benedikt Listing	18
1.3 William Thomson	18
1.4 James Clerk Maxwell	19
1.5 Peter Guthrie Tait	22
1.6 Thomas Penyngton Kirkman	23
1.7 Charles Newton Little	23
1.8 Wilhelm Wirtinger	24

1.9	Max Dehn	25
1.10	Kurt W. Friedrich Reidemeister	25
1.11	James W. Alexander	26
1.12	Horst Schubert	26
1.13	John Horton Conway	27
1.14	Vaughan Frederick Randal Jones	27
1.15	Clifford H. Dowker, Morwen Thistlethwaite, Jim Hoste e J. Weeks	28
2	Fundamentos da Teoria dos Nós	31
2.1	A definição de um nó	31
2.2	Equivalência	36
2.3	Projeções: diagramas de nós	38
2.4	Os Movimentos de Reidemeister	41
2.5	Nós Orientados e Invertíveis	44
2.5.1	A orientação de um nó	44
2.5.2	O inverso de um nó	45
2.6	Reflexão de um nó e quiralidade	49

2.7	Soma conexa de nós	50
2.8	Nós primos e compostos	54
2.9	Enlaces	54
3	Invariantes de Nós e Enlaces	61
3.1	Invariantes Clássicos	62
3.1.1	Tricolorabilidade	62
3.1.2	Número de Cruzamentos	64
3.1.3	Número de Desatamento	65
3.2	O Determinante de um Nó	69
3.2.1	O determinante do nó trevo	70
3.2.2	O determinante do nó oito	71
3.3	Polinômio de Alexander	73
3.3.1	Calculando o polinômio de Alexander	74
3.3.2	Calculando o polinômio de Alexander do nó trevo	75
3.3.3	Calculando o polinômio de Alexander do nó trevo de 4 cruzamentos	77

3.3.4	Calculando o polinômio de Alexander do nó oito	79
4	Teoria dos Nós e o Ensino Fundamental e Médio	85
4.1	Estudando nós e diagramas	87
4.1.1	Sugestões de atividades para o Ensino Fundamental e Médio	87
4.2	Estudando os invariantes	92
4.2.1	Tópicos de Tricolorabilidade	93
4.2.2	Número de Cruzamentos	94
4.2.3	Número de Desatamento	96
4.2.4	Calculando o Determinante de um Nó	97
4.2.5	Calculando o Polinômio de Alexander	105
	Posfácio	117
	Referências Bibliográficas	118

Capítulo 1

Um Breve Histórico da Teoria dos Nós

É de conhecimento geral que a matemática da antiguidade desenvolveu-se muito graças às necessidades cotidianas da humanidade. Podemos lembrar que vários povos antigos utilizavam nós em cordas, com objetivo de contabilizar a passagem do tempo, medir comprimentos e amarrar objetos e animais. No entanto, o estudo topológico é datado a partir do século XIX e suas descobertas mais importantes ocorreram no século XX. Neste capítulo, falaremos brevemente sobre algumas contribuições dadas por cientistas para o desenvolvimento da Teoria dos Nós, não necessariamente em ordem cronológica.

1.1 Carl Friedrich Gauss

Considerado o precursor da Teoria dos Nós, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (*1777, †1855) tentou classificar curvas planas fechadas com um número finito de auto-interseções e também ocupou-se na tabulação de nós e enlaces. Registros históricos comprovam, ainda, que Gauss trabalhou muito bem nessa área de pesquisa, mas somente depois de sua morte os resultados foram publicados.

1.2 Johann Benedikt Listing

Aluno de Gauss, o matemático alemão Johann Benedikt Listing (*1808, †1882), em 1847, estudou nós matemáticos e sua classificação. Benedikt estava interessado no desenvolvimento do cálculo algébrico de diagramas, especificamente na determinação de quando dois deles representavam o mesmo nó, mas não obteve muitos progressos.

1.3 William Thomson

O físico britânico William Thomson (*1824, †1907), na tentativa de formular uma teoria atômica consistente, vislum-

brou no estudo dos nós a possibilidade de unir duas correntes científicas que dominavam as discussões sobre o tema na época: uma delas afirmava que a matéria era dotada de minúsculas partículas rígidas, enquanto a outra sustentava a hipótese de que era constituída de ondas. Thomson, conhecido à época pelo título de nobreza Lorde Kelvin, recebido em 1866 da rainha Vitória da Inglaterra, resolveu unificar as ideias. De acordo com sua proposição, o Universo era formado por um imenso fluido invisível denominado “éter”, e os átomos seriam vórtices nesse fluido no formato dos nós. Dessa maneira, os elementos químicos seriam representações nodais de diferentes tipos, por exemplo, o átomo de carbono um nó trevo, o oxigênio um nó oito e assim por diante.

A teoria atômica de Thomson foi interessante e resistiu por algum tempo, mas declinou no decorrer dos anos e com o avanço científico. Por outro lado, seus estudos em Termodinâmica e leis de conservação de energia o promoveram ao status de grande cientista da história da humanidade. Dentre suas contribuições, vale salientar a escala absoluta de temperatura que leva seu título até hoje (Kelvin).

1.4 James Clerk Maxwell

As ideias de Thomson sobre átomos nodosos interessaram ao físico e matemático britânico James Clerk Maxwell

(*1831, †1879), que estudava eletromagnetismo e idealizou uma possível conexão com a Teoria dos Nós. Escreveu, então, para Thomson e para Peter Guthrie Tait apresentando algumas de suas proposições, dentre as quais afirmava que o nó trevo era o mais simples atado em uma única linha e ainda elaborou equações para as curvas. Os dois interessaram-se, em particular, pela possibilidade de representar nós como curvas tridimensionais equacionáveis.

Em 1868, Maxwell passou a estudar mais profundamente a topologia nodal. Com objetivo de descobrir se duas projeções dadas representavam um mesmo nó ou enlace no espaço tridimensional, desenvolveu um sistema de rotulagem para os pontos de cruzamento e arcos, onde cada arco era definido como a linha da projeção entre dois cruzamentos. Dessa forma, propôs possibilidades para regiões delimitadas por arcos. Vejamos os casos abaixo:

1. para regiões delimitadas por um único arco, este era simplesmente uma torção imediata, podendo ser facilmente desfeita sem alterar a ligação (figura 1.1).
2. para as regiões delimitadas por dois arcos, Maxwell encontrou duas possibilidades (figura 1.2).
 - uma região criada com uma linha passando sobre uma outra em dois pontos consecutivos. Dessa maneira a linha superior pode ser movida de modo

que não atravessa o cordão inferior, isto é, não altera o tipo de ligação.

- uma região criada com uma linha passando por cima e, em seguida, por baixo, de uma outra. Nesta situação já não é possível mover uma das linhas sem alterar o tipo de ligação.

3. para as regiões delimitadas por três arcos, também existem duas possibilidades (figura 1.3).

- uma curva pode ser movida depois do cruzamento das outras duas sem alterá-las.
- o movimento anterior não pode ser feito pois a interseção das duas primeiras curvas impede o movimento da terceira nessa direção.

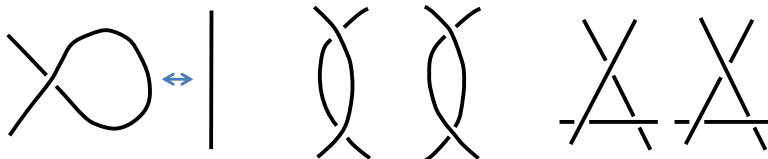


Figura 1.1: Região delimitada por um arco.

Figura 1.2: Região delimitada por dois arcos.

Figura 1.3: Região delimitada por três arcos.

Maxwell também trabalhou com regiões delimitadas por quatro ou mais arcos, mas não obteve sucesso. Seu trabalho inspirou, quase 60 anos mais tarde, o matemático alemão Kurt Reidemeister em sua pesquisa sobre diagramas de nós projetados no plano.

1.5 Peter Guthrie Tait

O físico e matemático escocês Peter G. Tait (★1831, †1901) não ficou, a princípio, convencido com a hipótese de Thomson sobre os átomos. Mesmo assim, em 1876, propôs uma tabela completa de nós até um determinado número de cruzamentos, com o objetivo de associar a uma tabela de elementos químicos.

Peter Tait também interessou-se pela codificação de cruzamentos e por invariantes, que são propriedades capazes de verificar a equivalência através de diagramas. Um dos maiores resultados de suas pesquisas sobre a enumeração foi a constatação da existência de nós que poderiam ser deformados de destros para canhotos ou vice-versa, sem alterações estruturais. Ele classificou esse tipo de nó como aquiral (ou reflexivo) e também verificou que o nó oito enquadra-se nessa classificação. Sua aposentadoria das tarefas de tabulação praticamente encerrou a teoria atômica de Kelvin, já que esta dependia do

seu trabalho.

1.6 Thomas Penyngton Kirkman

Peter Guthrie Tait logicamente sabia que o gigantesco problema da enumeração demandava a reunião de especialistas com altíssima qualificação. E nessa captação de talentos, recebeu a ajuda de Thomas Penyngton Kirkman (*1806, †1895), matemático britânico, estudioso de problemas combinatórios envolvendo grafos e hipergrafos. Kirkman viu a enumeração de nós como um problema análogo ao de sua pesquisa com grafos planares e percebeu que torcer movimentos não era viável, isto é, as equivalências através de tais operações deveriam ser desconsideradas.

Em maio de 1884, Thomas Kirkman enviou para Tait a enumeração das projeções de todos os nós até 10 cruzamentos. O trabalho dos dois foi combinado e apresentado na *Royal Society of Edinburgh*, pouco tempo depois.

1.7 Charles Newton Little

Charles Newton Little (*1858, †1923), um americano, Ph.D. em matemática, enviou para Peter Tait uma tabela com enume-

ração de nós até 10 cruzamentos, pouco antes da publicação dos trabalhos de Tait e Kirkman. Essa tabela, inclusive, serviu como tese intitulada “*On Knots, with a Census for Order 10*”, na obtenção do seu doutorado em 1885.

De posse desse material, Peter Tait foi capaz de comparar e encontrar uma duplicação e omissão e também uma duplicação em sua própria lista. Em 1899, Little enviou para Tait um trabalho que afirmava conter uma tabela completa de 43 nós não alternados, distintos, com 10 cruzamentos e somente em 1974 foi identificada uma única duplicidade. Com o avanço das pesquisas sabe-se, atualmente, que existem muito mais nós não alternados do que alternados.

1.8 Wilhelm Wirtinger

Grupo fundamental do complemento de um nó é, basicamente, o que sobra do espaço após uma exclusão desse nó. Esse conceito foi estudado pela primeira vez em 1905, pelo matemático austríaco Wilhelm Wirtinger (✱1865, †1945), cujo trabalho mostrou rigorosamente que o nó trevo era muito bem definido. Wirtinger compartilhou com Kurt Reidemeister, seu colega professor na Universidade de Viena, um método para calcular o grupo fundamental de um nó através de uma projeção.

1.9 Max Dehn

Max Dehn (\star 1878, \dagger 1952), matemático alemão e aluno de David Hilbert, interessou-se pela Teoria dos Nós trabalhando para provar a conjectura de Poincaré. Embora não tenha realizado essa tarefa, desenvolveu um algoritmo distinto do de Wirtinger para a construção do grupo fundamental do complemento de um enlace. Com isso, demonstrou que o nó trevo é topologicamente diferente de sua imagem no espelho. A Primeira Guerra Mundial interrompeu suas pesquisas.

1.10 Kurt W. Friedrich Reidemeister

Kurt Werner Friedrich Reidemeister (\star 1893, \dagger 1971), matemático alemão e Professor da Universidade de Königsberg, foi um dos mais importantes expoentes da Teoria dos Nós. Através de grupos fundamentais, Reidemeister mostrou que todas as projeções de um enlace eram relacionadas por uma sequência de três movimentos batizados com seu nome. Até hoje, esses movimentos são fundamentais para compreender as deformações que ocorrem nos diagramas em busca da equivalência e receberão o devido destaque nos capítulos seguintes deste livro. Abaixo vemos ilustrações dos movimentos de Reidemeister.



Figura 1.4: Movimento R_1

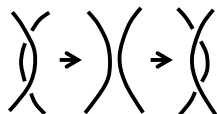


Figura 1.5: Movimento R_2

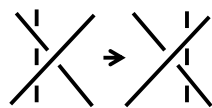


Figura 1.6: Movimento R_3

1.11 James W. Alexander

James W. Alexander ($\star 1888, \dagger 1971$) foi um importantíssimo matemático americano, conhecido no meio científico como um dos fundadores da Topologia. Suas pesquisas sobre os nós através de grupos de homologia, convergiram para o desenvolvimento de um notável invariante polinomial. Nos capítulos 3 e 4 trataremos o polinômio de Alexander com maior especificidade.

1.12 Horst Schubert

O matemático alemão Horst Schubert ($\star 1919, \dagger 2001$), no final dos anos 1940 conseguiu perceber que a soma conexa de nós apresenta algumas semelhanças com propriedades da multiplicação de números. Ele observou, por exemplo, que um nó

trivial não altera outro nó quando efetua-se uma composição, isto é, comporta-se semelhantemente ao número 1 na condição de elemento neutro da multiplicação. Tal fato contribuiu para a compreensão da decomposição primária nodal.

1.13 John Horton Conway

Na década de 1960, John H. Conway (*1937, †2020), matemático britânico, desenvolveu um método para codificação que favoreceu a tabulação de todos os enlaces de até 10 cruzamentos sem, contudo, detectar a duplicação existente na lista de Charles Little de nós alternados de 10 cruzamentos. Em seus trabalhos, Conway conseguiu descobrir 11 omissões e uma duplicação na lista de Little de nós alternados com 11 cruzamentos, mas a sua própria lista de nós não alternados continha quatro omissões ignoradas até o final de 1970. Sua colaboração com a Teoria dos Nós foi ainda mais contundente com a criação do seu próprio invariante, conhecido como o polinômio de Conway.

1.14 Vaughan Frederick Randal Jones

Vaughan F. R. Jones (*1952, †2020), matemático neozelandês, desenvolveu em 1984 um novo polinômio invariante de nós. Em relação a outros invariantes polinomiais, o polinô-

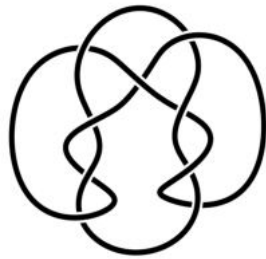
mio de Jones apresenta a capacidade de distinguir muitos nós de suas imagens de espelho. Por seu trabalho brilhante, em 1990 ganhou uma medalha Fields, o mais prestigiado prêmio para a pesquisa matemática.

1.15 Clifford H. Dowker, Morwen Thistlethwaite, Jim Hoste e J. Weeks

Os matemáticos Clifford Hugh Dowker (\star 1912, \dagger 1982), canadense, especialista em Topologia e Morwen Thistlethwait, britânico, foram os pioneiros na informatização dos problemas de enumeração e conseguiram, no início de 1980, elaborar uma tabela de nós com até 13 cruzamentos. Posteriormente, no início da década de 1990, o matemático americano Jim Hoste ajudou na retomada desses trabalhos para enumerar todos os alternados de 14 cruzamentos. Juntos, Thistlethwaite, Hoste e o matemático americano Jeffrey Weeks encontraram 1.701.936 nós primos distintos.

Os recursos computacionais facilitaram o processamento de dados mas também permitiram o surgimento de uma quantidade absurdamente alta de novos nós. Em 2003, relatórios de Hoste indicavam a tabulação de todos os primos e alternados de 22 cruzamentos, realizada por S. Rankin, J. Schermann, e O. Smith, com inacreditáveis 6.217.553.258 nós.

Atualmente é possível conhecer mais sobre esse assunto através de softwares específicos, mas o problema de saber se dois diagramas são equivalentes ainda persiste sem solução definitiva. No próximo capítulo estudaremos os fundamentos topológicos da Teoria dos Nós.



Capítulo 2

Fundamentos da Teoria dos Nós

Neste capítulo serão apresentados os fundamentos da teoria matemática de nós, pertencente à Topologia, cujas aplicações são diversas e envolvem Física Quântica, teoria das supercordas e até o estudo de cadeias de DNA.

2.1 A definição de um nó

Não é uma tarefa fácil explicitar uma definição para um nó sem adentrar nas profundezas da Topologia. Por exemplo, encontramos em (COELHO,2008) a seguinte definição: “ *Um*

nó é um mergulho $K : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow M^3$, onde M^3 é uma variedade fechada, compacta e sem bordo, e orientável de dimensão 3.” Já em (DIAS, 2004) encontramos a definição: “Seja f uma aplicação contínua e injetiva da circunferência usual \mathbb{S}^1 em \mathbb{R}^3 . A imagem $K = f(\mathbb{S}^1)$ diz-se um nó.”

A definição de nó que apresentaremos neste livro dependerá de alguns pré-requisitos. Considere dois pontos a e b em \mathbb{R}^3 . Denotando por \overline{ab} o segmento de reta que une a e b , suponhamos um conjunto de pontos distintos $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ de \mathbb{R}^3 . A união dos segmentos $\overline{a_1a_2}, \overline{a_2a_3}, \dots, \overline{a_{n-1}a_n}, \overline{a_na_1}$, é denominada curva poligonal fechada.

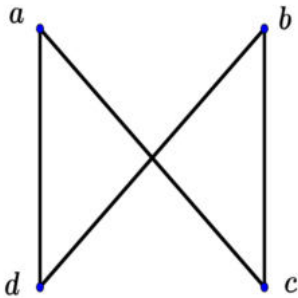


Figura 2.1: Curva poligonal fechada

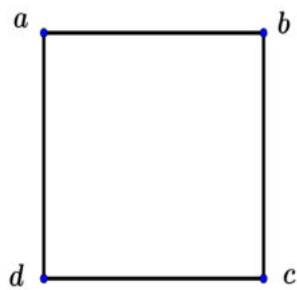


Figura 2.2: Curva poligonal fechada e simples

Contudo, é necessário verificar que alguns conjuntos de pontos são capazes de produzir várias curvas poligonais que, em algumas configurações, podem apresentar cruzamentos inconvenientes para a definição que queremos (ver exemplo na

figura (2.1)). Para escapar dessa limitação, delibera-se que se cada segmento de reta intersecta exatamente outros dois por seus pontos extremos, a curva é classificada como simples. A figura (2.1) ilustra uma curva poligonal fechada, enquanto a figura (2.2) ilustra uma curva poligonal fechada e simples. Fundamentalmente, um nó será tratado aqui como uma curva fechada e simples, obtida da união de pontos em \mathbb{R}^3 .

Feitas as devidas considerações, finalmente podemos apresentar a seguinte definição:

Definição 2.1.1 *Um nó é uma curva poligonal simples e fechada em \mathbb{R}^3 . (LIVINGSTON, 1993)*

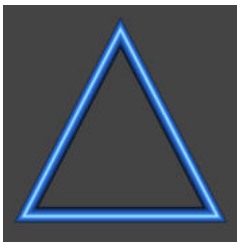


Figura 2.3: Nó trivial

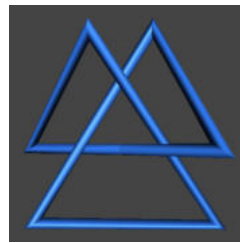


Figura 2.4: Nó trevo.

Observe ainda que dois ou mais conjuntos ordenados de pontos podem determinar um mesmo nó poligonal. Por exemplo, considerando três pontos consecutivos e colineares, e eliminando-se o ponto localizado entre os outros dois ainda preserva-se o mesmo segmento de reta que os contém, isto

é, o mesmo nó poligonal, porém, constituído por um conjunto distinto do original. Vejamos a ilustração na figura (2.5).

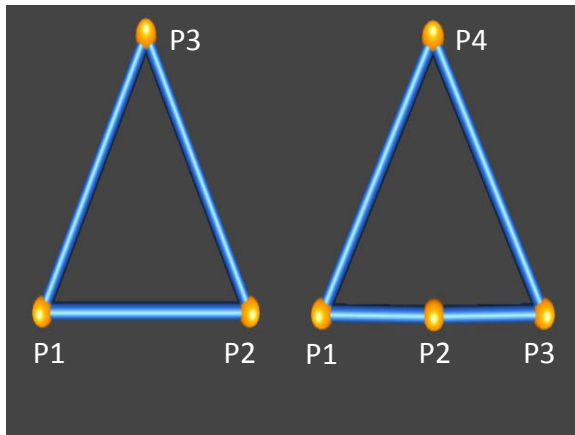


Figura 2.5: Nó poligonal determinado por conjuntos distintos de pontos

Definição 2.1.2 *Se o conjunto ordenado (p_1, p_2, \dots, p_n) define um nó poligonal, e nenhum subconjunto não próprio ordenado define o mesmo nó poligonal, então cada um dos elementos deste conjunto são os vértices do nó poligonal.*

Uma consequência imediata da definição acima é que o nó trivial é um poligonal definido por três pontos não colineares.

A partir daqui trataremos os nós como curvas “suaves”. Note que isso não viola a definição, já que essa suavização

pode ser obtida pela união de segmentos, em quantidade suficiente, num conjunto dado de pontos. Abaixo, ilustrações de curvas suaves.

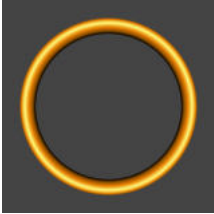


Figura 2.6: Nó trivial.

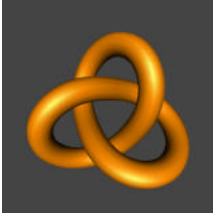


Figura 2.7: Nó trevo.

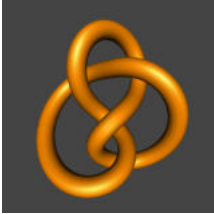


Figura 2.8: Nó oito

Alguns nós são tratados por nomes como o trevo ou o oito, por exemplo, mas a maioria deles recebe uma classificação numérica tabelada como na figura (2.9) abaixo.

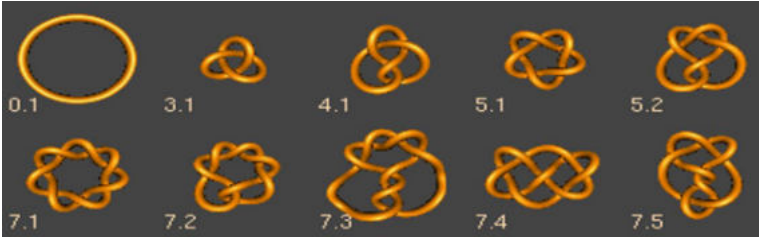


Figura 2.9: Tabela pequena de nós

O primeiro número na representação indica a quantidade de cruzamentos, enquanto o segundo número indica a posição na tabela. Ilustrativamente, o nó 7.5 é o quinto na classificação dos nós de sete cruzamentos. Alguns autores rotulam subscritando o segundo número ao primeiro (por exemplo 7_5).

2.2 Equivalência

Os nós podem ser apresentados em \mathbb{R}^3 de formas muito distintas e, continuamente, sofrer variações para gerar outros. Esse processo de deformação contínua e sem auto-intersecções de uma curva no espaço recebe o nome de isotopia. No entanto, para a verificação de equivalência, o conceito básico de isotopia não é suficiente.

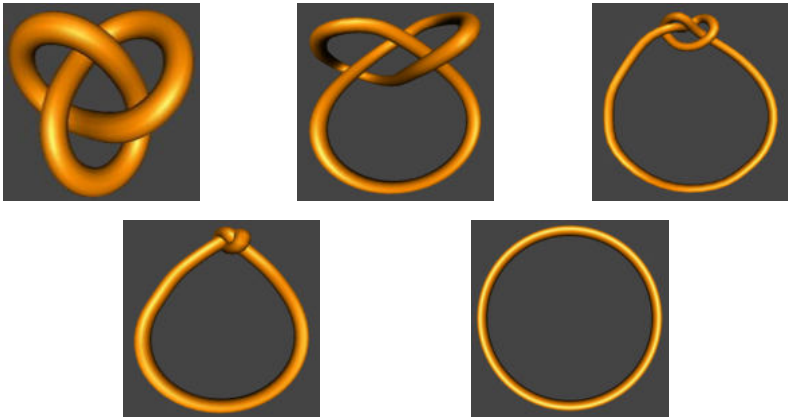


Figura 2.10: Ação da isotopia sobre um nó

De fato, considerando dois nós K_1 e K_2 , e uma isotopia $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow M^3$ tal que $H(x, 0) = K_1(x)$ e $H(x, 1) = K_2(x)$, $\forall x \in \mathbb{S}^1$, então K_1 e K_2 são isotópicos ao nó trivial. (COELHO, 2008)

A figura (2.10) ilustra a ação de uma isotopia comum aplicada sobre um nó. Observa-se que a curva é continuamente

absorvida fazendo com que o trevo em questão seja reduzido a um trivial. Esse fenômeno demonstra a necessidade de uma isotopia ambiente nas relações de equivalência. Nela, o espaço inteiro é deformado juntamente com a mudança de posição dos arcos, garantindo a manutenção da estrutura topológica.

Definição 2.2.1 *Dois nós K e K' dizem-se ambientes isotópicos se existir uma aplicação contínua $H : \mathbb{R}^3 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é definida por: $h_t = H(-, t)$ é um homeomorfismo $\forall t \in [0, 1]$, com $h_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$ e $h_1(K) = K'$. (DIAS, 2004)*

A figura (2.11) apresenta a transformação de um nó em trevo, de forma contínua em \mathbb{R}^3 . É um exemplo de isotopia ambiente.

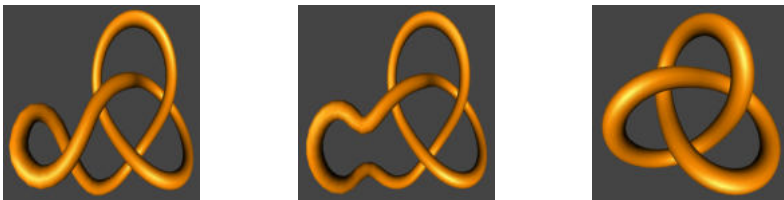


Figura 2.11: Isotopia ambiente sobre um nó

Por outro lado, não é possível alterar continuamente (por isotopia ambiente) um trevo até obter um trivial. A única forma de fazer isso seria através do rompimento do nó, desenlaçamento e união das pontas soltas após o processo. Vejamos a figura (2.12).

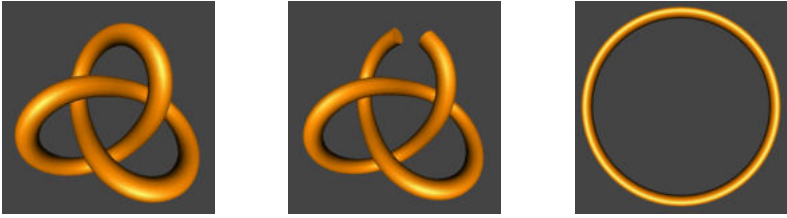


Figura 2.12:

De uma forma geral, ao manipularmos modelos nodais físicos, observamos que as curvas são amarradas nos cruzamentos e isso garante que toda isotopia sobre o nó real é ambiente. Tal constatação nos mostra que é possível desfazer mas não inverter, por isotopia ambiente, a posição das cordas num cruzamento dado, isto é, trocar a linha de cima para baixo e vice-versa pois, caso contrário, todo nó seria trivial como já foi dito. A partir daqui nos referiremos aos nós ambiente isotópicos através do termo “equivalentes”. Um dos principais problemas em aberto na teoria é saber se dois nós são ou não equivalentes.

2.3 Projeções: diagramas de nós

Neste momento, já sabemos que os nós são curvas no espaço. No entanto, boa parte do estudo sobre eles ocorre no plano bidimensional, através de projeções obtidas a partir das formas tridimensionais. Tais projeções, além de reduzir a di-

mensão, possibilitam uma visualização simplificada e, conseqüentemente, uma melhor manipulação. Com efeito, é possível tomar um nó K e um plano α de \mathbb{R}^3 e determinar uma projeção ortogonal de K sobre α . A imagem resultante denomina-se diagrama de K .

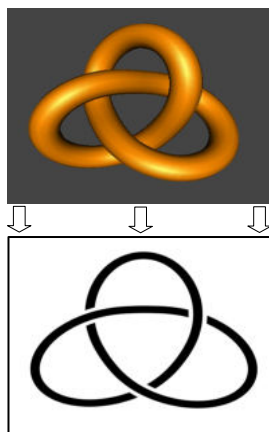


Figura 2.13: Nó trevo e seu diagrama projetado no plano.

Num diagrama, em cada cruzamento, uma das linhas é contínua representando o arco que passa por cima, enquanto a outra não é contínua representando o arco que passa por baixo. Além disso, por questões de simplificação, a representação ocorre através de curvas planas suaves, isto é, um diagrama pode ser compreendido como uma coleção de curvas contínuas, cujos arcos se encontram nos cruzamentos (geralmente três arcos em cada).

As definições a seguir nos ajudam a compreender algumas propriedades dos diagramas.

Definição 2.3.1 *Dada uma projeção $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \alpha$, α um plano de projeção, um ponto $A \in \psi(\mathbb{R}^3) \subset \alpha$ diz-se um ponto múltiplo se a pré imagem $\psi^{-1}(A)$ contém mais do que um ponto.*

Definição 2.3.2 *A projeção de um nó K é regular se*

- *contém apenas um número finito de pontos múltiplos.*
- *todos os pontos múltiplos são duplos e pontos de cruzamento, (COELHO,2008).*

Um diagrama regular deve, portanto, possuir um número finito de pontos de cruzamento.

Definição 2.3.3 *Dado um nó K , o número de cruzamentos $c(K)$ é o menor possível dentre todos os diagramas desse nó. O diagrama que possui $c(K)$ cruzamentos denomina-se mínimo de K .*

Se um diagrama não possuir cruzamentos, representa o nó trivial. Não existem nós com um ou dois cruzamentos e os únicos que possuem três cruzamentos são os dois trevos. Além disso, um diagrama pode ser alternado ou não alternado conforme o arranjo dos cruzamentos.

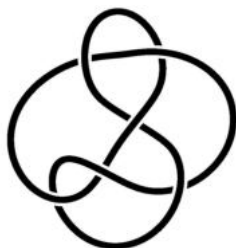


Figura 2.14: 6_3 : seis cruzamentos.

Definição 2.3.4 *Se um diagrama de nó apresenta cruzamentos que aparecem alternadamente por cima e por baixo ao longo da corda, recebe a denominação de nó alternado.*

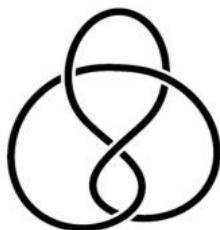


Figura 2.15: Alternado



Figura 2.16: Não alternado

2.4 Os Movimentos de Reidemeister

O matemático alemão Kurt Reidemeister desenvolveu movimentos capazes de provocar deformações sobre os diagramas de nós e, conseqüentemente, verificar equivalências.

Definição 2.4.1 *Os movimentos de Reidemeister são capazes de alterar diagramas de nós, deformando continuamente seus arcos ou alterando a relação entre os cruzamentos.*

[R_0] *Movimento simples de deformação dos arcos sem alteração de cruzamentos.*

[R_1] *Movimento que introduz ou remove uma torção no diagrama.*

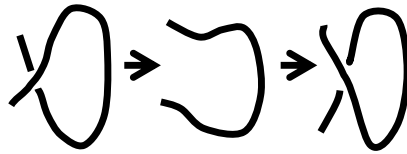


Figura 2.17: Movimento R_1 : torção no diagrama

[R_2] *Movimento que introduz ou remove dois cruzamentos que cruzam ar-*

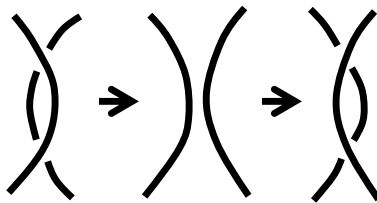


Figura 2.18: Movimento R_2 : introdução/remoção de cruzamentos

[R_3] *Movimento que faz passar um dos arcos do diagrama por cima ou por baixo de um cruzamento.*

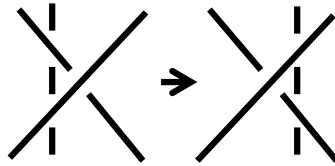


Figura 2.19: Movimento R_3 : passagem do arco por cima ou por baixo do cruzamento

A figura (2.20) apresenta uma transformação através de movimentos de Reidemeister. É apenas um exemplo que ilustra o resultado do teorema que vem em seguida.

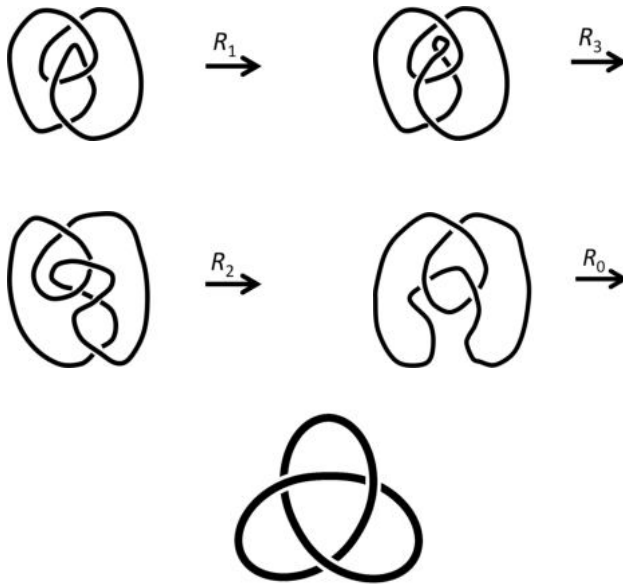


Figura 2.20: Sequência de movimentos de Reidemeister

Teorema 2.4.2 *Dois diagramas $D(K_1)$ e $D(K_2)$ representam nós equivalentes se, e somente se, existe uma sequência de movimentos de Reidemeister que transforma K_1 em K_2 .*

Embora o enunciado desse teorema seja de fácil compreensão, sua prova é complexa e envolve topologia combinatória, portanto, inapropriada para este livro.

2.5 Nós Orientados e Invertíveis

Nesta seção trataremos da orientação de diagramas de nós e dos critérios que definem se um nó é invertível ou não.

2.5.1 A orientação de um nó

Definição 2.5.1 *Um nó orientado apresenta uma direção escolhida de circulação.*

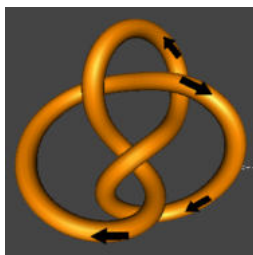


Figura 2.21: Nó oito orientado

Além disso, para cada cruzamento num diagrama atribui-se um sinal conforme a figura (2.22).

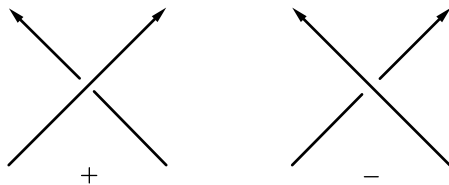


Figura 2.22: Sinais usuais para cruzamentos

Note o nó oito na figura (2.23) evidenciando os sinais de seus cruzamentos, conforme a convenção usual supracitada.

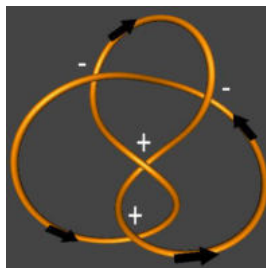


Figura 2.23: Nó figura oito com sinais nos cruzamentos

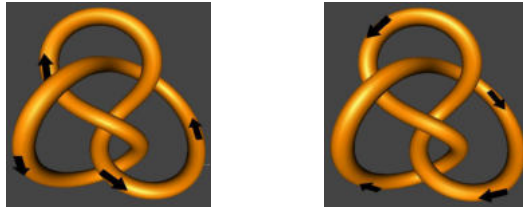
Definição 2.5.2 A contorção $W(D)$ de um diagrama orientado D é a soma de sinais de todos os cruzamentos.

2.5.2 O inverso de um nó

Já sabemos que um nó é determinado à custa de um conjunto de pontos (p_1, p_2, \dots, p_n) . Se esse conjunto de pontos

caracteriza um sentido direcional ao nó, então o conjunto $(p_n, p_{n-1}, \dots, p_2, p_1)$, determina um sentido contrário ao primeiro.

Definição 2.5.3 *O inverso de um nó poligonal K definido por um conjunto ordenado de pontos (p_1, p_2, \dots, p_n) é o nó $-K$ definido por (p_n, \dots, p_2, p_1) .*



Em outras palavras, o inverso $-K$ equivale a K com orientação inversa. Observe ainda que, dado um conjunto de pontos (p_1, p_2, \dots, p_n) definindo um nó, existem vários rearranjos que permitem descrevê-lo, por exemplo, $(p_3, p_4, \dots, p_n, p_1, p_2)$ e $(p_2, p_3, \dots, p_n, p_1)$.

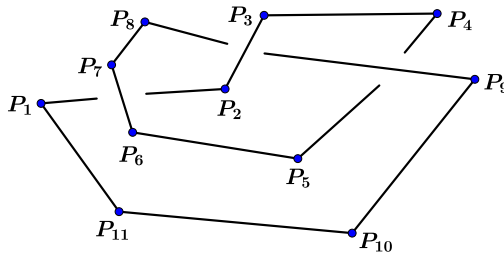


Figura 2.24: Representação poligonal do nó trevo orientado

Proposição 2.5.4 *Considere os nós K e $-K$ e seus respectivos diagramas D_K e D_{-K} . Então $W(D_K) = W(D_{-K})$.*

Prova. Considerando um nó K arbitrário, os cruzamentos possíveis de seu diagrama D_K são aqueles representados na figura (2.22). Se invertermos a orientação do diagrama D_K obtemos D_{-K} , de modo que os seus novos cruzamentos serão apresentados conforme a figura (2.25). Observe que a alteração na orientação do diagrama não modifica os sinais dos cruzamentos, portanto, $W(D_K) = W(D_{-K})$. ■

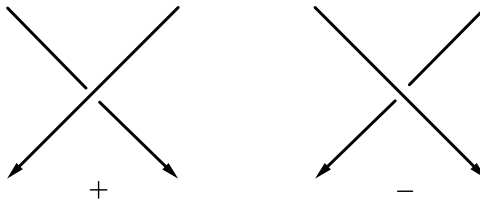


Figura 2.25: Cruzamentos do nó $-K$

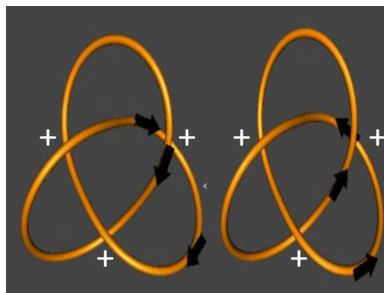


Figura 2.26: Sinais no nó trevo: $W(D_K) = 3 = W(D_{-K})$

Por exemplo, para um trevo e seu inverso tem-se que $W(D_K) = 3 = W(D_{-K})$ (ver figura(2.26)).

Definição 2.5.5 Um nó K é classificado como invertível se K e $-K$ são equivalentes.

Como exemplo de nó invertível podemos citar o trevo. Com efeito, tomando um diagrama do trevo com orientação definida, é possível aplicar uma sequência de movimentos de Reidemeister até invertê-lo. A figura (2.27) abaixo ilustra essa transformação.

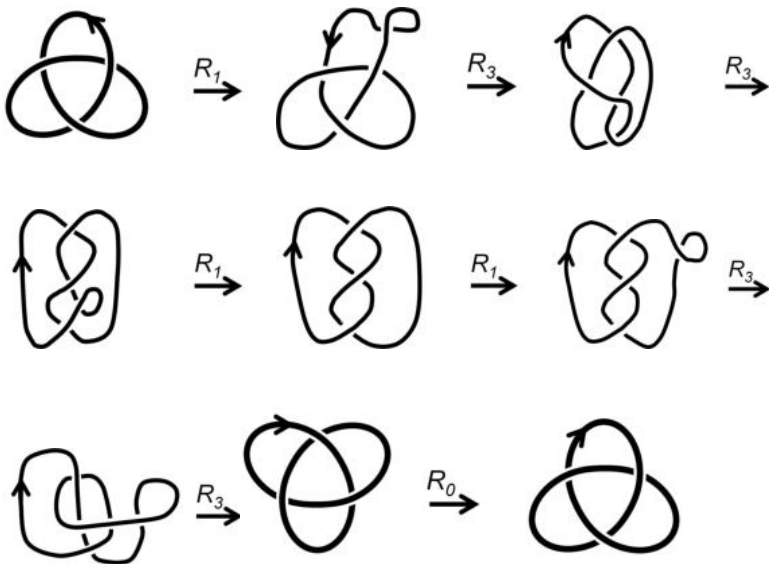


Figura 2.27: Sequência de movimentos de Reidemeister na inversão do trevo orientado

Abaixo segue exemplo de nó não invertível.

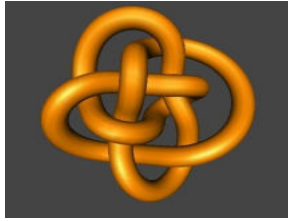


Figura 2.28: Nó não invertível: 8_{17}

2.6 Reflexão de um nó e quiralidade

Definição 2.6.1 *Dado um nó K , a sua imagem refletida no espelho é o nó \bar{K} , onde a reflexão é feita através de um plano em \mathbb{R}^3 , isto é, pela transformação de um ponto (x, y, z) em $(x, y, -z)$.*

A orientação de \bar{K} é a mesma de K . O efeito imediato da reflexão de um nó é a alteração de todos os seus cruzamentos.

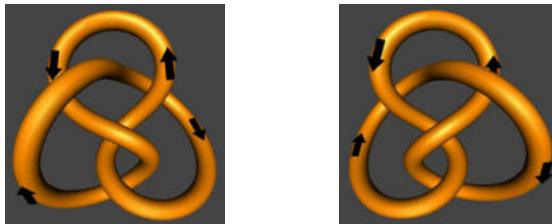


Figura 2.29: Nó oito e sua imagem refletida

Definição 2.6.2 *Um nó é denominado quiral se não é equivalente a sua imagem refletida no espelho. Do contrário ele é aquiral (ou reflexivo).*

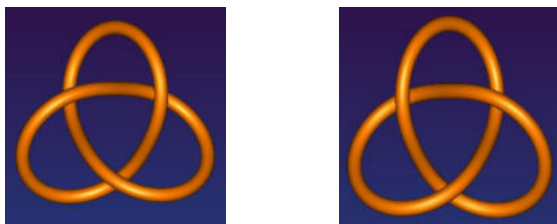


Figura 2.30: O nó trevo é quiral

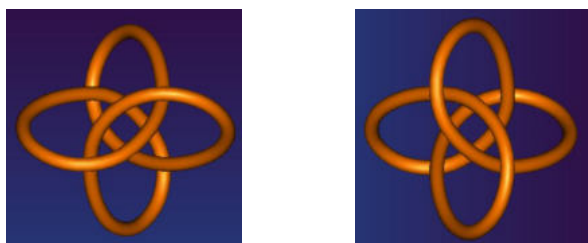


Figura 2.31: Exemplo: nó aquiral

2.7 Soma conexa de nós

Ao tomarmos dois nós quaisquer com orientações definidas, podemos rompê-los em pontos determinados e unir as pontas soltas de um com o outro sem introduzir um novo cruzamento. Esse procedimento denomina-se soma conexa. Para facilitar a compreensão dessa aritmética nodal, consideremos os diagramas poligonais dos nós K_1 e K_2 definidos respectivamente pelos conjuntos de pontos (p_1, \dots, p_n) e (q_1, \dots, q_r) , n, r inteiros positivos.

- *Primeiramente posicionemos os diagramas de modo que as suas orientações sejam concordantes, isto é, que permitam a união conexa preservando as orientações originais.*
- *Tomemos os segmentos $\overline{ab} \subseteq \overline{p_i p_{i+1}} \subset K_1$ e $\overline{cd} \subseteq \overline{q_j q_{j+1}} \subset K_2$, de forma que por eles não passe nenhum cruzamento e que estejam localizados mais ao exterior do diagrama para facilitar o procedimento.*
- *Retiremos os segmentos \overline{ab} de K_1 e \overline{cd} de K_2 e efetuemos a conexão \overline{ad} e \overline{cb} sem acréscimo de cruzamentos.*

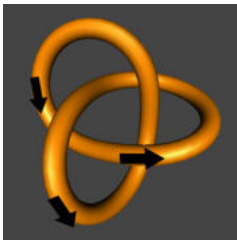


Figura 2.33: Nó K_1 orientado

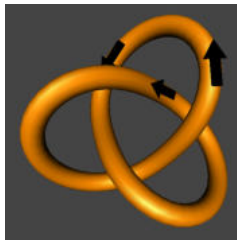


Figura 2.34: Nó K_2 orientado

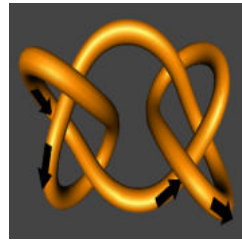


Figura 2.35: soma $K_1 \# K_2$

Se os diagramas não estiverem com orientações favoráveis, é possível rotacioná-los ou invertê-los, caso sejam invertíveis, de modo a estabelecer uma posição adequada à conexão. Nota-se que a soma conexa de nós é bem definida, pois, dados K_1 e K_2 , a operação $K_1 \# K_2$ independe da escolha de pontos para sua composição. Em outras palavras $K_1 \# K_2$ é unicamente determinada por K_1 e K_2 .

Proposição 2.7.2 *Considere os nós K_0, K_1, K_2 e K_3 orientados, onde K_0 é o nó trivial. Então,*

1. $K_i \# K_0 \approx K_i, i \in \mathbb{N}$
2. $K_1 \# K_2 \approx K_2 \# K_1$
3. $K_1 \# (K_2 \# K_3) \approx (K_1 \# K_2) \# K_3$
4. *Se K_1 é não trivial, $K_1 \# K_2$ é não trivial.*

O item 1. é evidente pois o nó trivial é absorvido na soma conexa (ver figura (2.36)). Os itens 2. e 3. também são facilmente comprovados. Com efeito, a soma conexa de nós é comutativa, pois, tomando os diagramas de K_1 e K_2 , uma composição $K_1 \# K_2$ é unicamente determinada conforme supracitado. Supondo que $K_1 \# K_2$ foi obtido através de dois arcos especificamente escolhidos de K_1 e K_2 , os mesmos arcos podem ser escolhidos para $K_2 \# K_1$. Analogamente, verifica-se a propriedade associativa apresentada no item 3. Para o quarto item, se K_2 é trivial nada a provar, de acordo com o item 1. Se K_2 é não trivial podemos supor por absurdo que $K_1 \# K_2$ é trivial e concluir que K_1 é trivial e não trivial. Uma consequência imediata do item 4. é que se $K_1 \# K_2$ é trivial, então K_1 e K_2 são triviais.

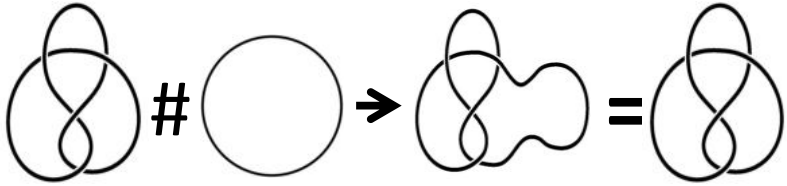


Figura 2.36: Soma conexa entre nó oito e nó trivial

2.8 Nós primos e compostos

Definição 2.8.1 *Um nó K que é resultado de uma soma conexa de dois nós não triviais é chamado de composto. Um nó não trivial que não é composto é um nó primo.*

Um nó composto pode ser fatorado em primos, sem que haja o trivial na fatoração. Se um nó primo é fatorado como soma conexa de dois nós, um deles é o próprio e o outro é trivial. A figura (2.36) ilustra o nó oito, primo, e a figura (2.35) apresenta um nó composto.

2.9 Enlaces

Definição 2.9.1 *Um enlace é a união finita de nós disjuntos. Em particular, um nó é um enlace de uma componente. Um enlace trivial é a união disjunta de nós triviais no plano. (LIVINGSTON, 1993)*

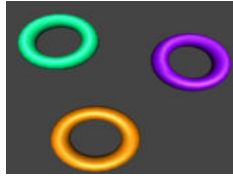


Figura 2.37: Enlace trivial com 3 componentes

Abaixo, mais exemplos de enlaces.

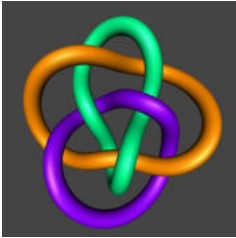


Figura 2.38: Enlace 8.3.6

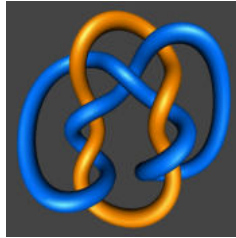


Figura 2.39: Enlace 9.2.9

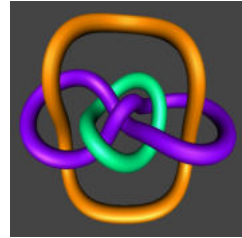


Figura 2.40: Enlace 9.3.20

O estudo dos nós também permite projetar enlaces sobre um plano para obter diagramas.

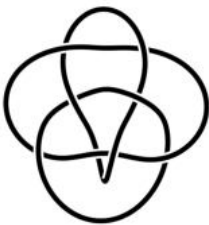


Figura 2.41: Diagrama 8.3.6

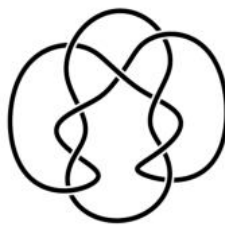


Figura 2.42: Diagrama 9.2.9

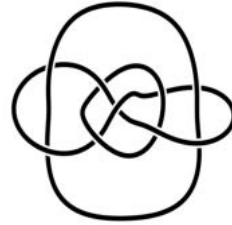


Figura 2.43: Diagrama 9.3.20

A numeração dos enlaces destaca a quantidade de cruzamentos, a quantidade de componentes e a posição na tabela, respectivamente. Nas figuras (2.41), (2.42) e (2.43) temos os enlaces 8.3.6 (8 cruzamentos, 3 componentes e posição 6), 9.2.9 (9 cruzamentos, 2 componentes e posição 9) e 9.3.20 (9 cruzamentos, 3 componentes e posição 20), respectivamente.

Assim como ocorre com os nós, podemos efetuar movimentos de Reidemeister sobre diagramas de enlaces na busca de equivalências. Também aplicam-se as mesmas regras para os sinais de cruzamentos e a contorção. Um enlace também pode ser orientado desde que cada um de seus componentes possua um sentido definido para a orientação.

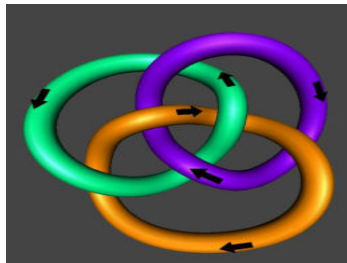


Figura 2.44: Enlace orientado de 3 componentes

Vejamos agora como se define o número de ligação de dois componentes de um enlace.

Definição 2.9.2 *Considere um enlace orientado com n componentes. O número de ligação $lk(K_i, K_j)$ de cada par distinto de componentes (K_i, K_j) é a metade da soma dos sinais*

de seus cruzamentos. O número de ligação do enlace E é a soma dos números ligação de todos os pares distintos de componentes.

$$lk(E) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} lk(K_i, K_j)$$

Observe as figuras abaixo.

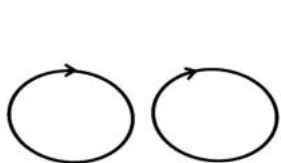


Figura 2.45:
 $lk(L_0) = 0.$

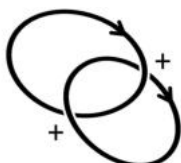


Figura 2.46:
 $lk(L_1) = 1.$

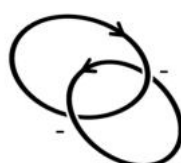


Figura 2.47:
 $lk(L_2) = -1.$

Nas figuras (2.45), (2.46) e (2.47) temos um enlace trivial L_0 de duas componentes e dois enlaces não triviais L_1 e L_2 de duas componentes, conhecidos como anéis de Hopf. Neste exemplo temos os seguintes números de ligação: $lk(L_0) = 0$, $lk(L_1) = 1$ e $lk(L_2) = -1$. O número de ligação pode nos fornecer informações acerca da equivalência de enlaces. Por exemplo, podemos concluir que os anéis de Hopf não podem ser separados pois o número de ligação deles é diferente do número de ligação do enlace trivial de dois componentes. Caso tais números fossem iguais não poderíamos concluir nada a esse respeito. O teorema abaixo associa a equivalência com os números de ligação.

Teorema 2.9.3 *Se dois enlacs L_1 e L_2 são equivalentes, então $lk(L_1) = lk(L_2)$.*

Prova. Para esta prova observe que os movimentos de Reidemeister cabíveis a dois componentes de um enlace são R_2 e R_3 . O movimento R_2 pode introduzir ou remover cruzamentos ambos por cima ou ambos por baixo, isto é, acrescenta ao enlace dois cruzamentos de sinais contrários, o que não altera o número de ligação. Já o movimento R_3 faz passar um dos arcos do diagrama por cima ou por baixo, e no caso do enlace não altera nenhum cruzamento, logo não altera o número de ligação. ■

Por esse teorema podemos concluir que os diagramas nas figuras (2.45), (2.46) e (2.47) não são equivalentes entre si pois todos os números de ligação são distintos.

Proposição 2.9.4 *Considere um enlace L , sua imagem reflexiva \bar{L} e seu inverso $-L$. Então $lk(\bar{L}) = -lk(L)$ e $lk(-L) = lk(L)$.*

Prova. Tomando inicialmente o enlace L , podemos obter \bar{L} alterando todos os cruzamentos e, conseqüentemente, todos os sinais dos cruzamentos, logo o número de ligação $lk(\bar{L})$ é simétrico em relação a $lk(L)$. Agora, tomando o enlace $-L$, inverso de L , sabemos que sua orientação é inversa em comparação com L , mas isso não altera os sinais dos cruzamen-

tos, logo não altera o número de ligação. ■

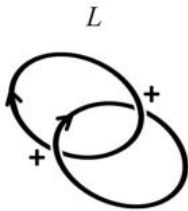


Figura 2.48:
 $lk(L) = 1.$

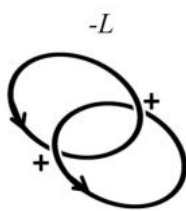


Figura 2.49:
 $lk(-L) = 1.$

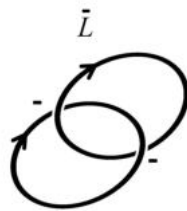
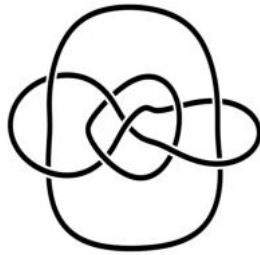


Figura 2.50:
 $lk(\bar{L}) = -1.$

Observando as figuras (2.48), (2.49) e (2.50) conclui-se que $lk(L) = lk(-L) = 1 = -lk(\bar{L})$.

No próximo capítulo veremos alguns invariantes, que são recursos matemáticos utilizados para verificar a equivalência de enlacs e nós.



Capítulo 3

Invariantes de Nós e Enlaces

Um invariante é um recurso que serve para verificar se dois nós ou enlaces são ou não equivalentes. Existem vários tipos, sendo alguns numéricos, outros polinomiais, etc. De uma forma geral, podemos pensar num invariante λ como um objeto matemático vinculado a um nó ou enlace de modo que, ao tomarmos um nó K_1 equivalente a outro nó K_2 , teremos K_1 e K_2 associados ao mesmo λ . Por outro lado, se λ é invariante de K_1 e $\lambda(K_1) \neq \lambda(K_2)$ significa que K_1 e K_2 são distintos. É importante salientar que não se conhece até hoje um invariante suficientemente poderoso para fazer essa verificação em larga escala. Além disso, cada um deles possui uma aplicação mais

ou menos eficiente de acordo com os tipos de nós ou enlaces estudados.

3.1 Invariantes Clássicos

Nesta seção trataremos de alguns invariantes considerados clássicos, tais como a tricolorabilidade, o número de cruzamentos e o número de desatamento de um nó ou enlace. Eles recebem essa denominação porque foram os primeiros utilizados na Teoria dos Nós.

3.1.1 Tricolorabilidade

Definição 3.1.1 *Um diagrama de nó (enlace) é tricolorizável se:*

1. *cada arco possui uma cor;*
2. *utiliza no mínimo duas e no máximo três cores;*
3. *para cada cruzamento, ou todos os arcos tem a mesma cor ou possuem três cores.*

Observe o exemplo na figura (3.1):

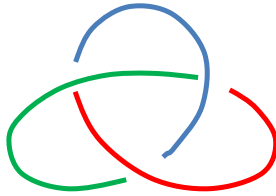


Figura 3.1: Nó trevo tricolorizado.

Definição 3.1.2 *Um enlace é tricolor se seus diagramas são tricolores.*

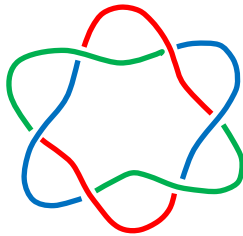


Figura 3.2: Enlace 6.2.1 tricolor.

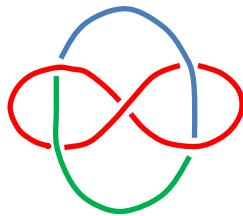


Figura 3.3: Enlace 5.2.1 não tricolor.

Note que o diagrama da figura (3.3) possui dois cruzamentos onde os arcos tem duas cores, isto é, não atende à condição 3. na definição da tricolorabilidade, portanto, não é tricolor.

A tricolorabilidade é um invariante da classe de isotopia de um nó ou enlace, isto é, se um diagrama é tricolorizável e outro diagrama não é, significa que não são equivalentes. Por exemplo, o nó trivial não é tricolor pois possui apenas um arco e não atende à quantidade mínima de cores (duas) da definição. Por outro lado o nó trevo é tricolor (ver figura (3.1)), isto é, o trevo e o trivial possuem classes de isotopia distintas ou, em outras palavras, não são equivalentes.

3.1.2 Número de Cruzamentos

Considere o conjunto D_i de todos os diagramas de um enlace E . O diagrama D_m desse conjunto que possuir o menor número de cruzamentos possíveis é dito diagrama minimal de E . Além disso, esse número mínimo de cruzamentos de D_m é o número $C(E)$ de cruzamentos do próprio enlace E ($C(E) = C(D_m)$). Dessa maneira $C(E)$ é considerado um invariante de classe de isotopia do enlace.

Essa definição minimal de número de cruzamentos é necessária, pois, dado um diagrama qualquer não mínimo, existem cruzamentos que desaparecerão através de movimentos

de Reidemeister até que se obtenha o minimal. Veja a figura (3.4) abaixo:

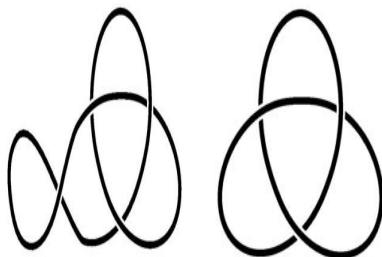


Figura 3.4: Diagrama qualquer e mínimo do nó trevo, respectivamente.

Observe que os números de cruzamento dos trevos na figura (3.4) são respectivamente 4 e 3. Logo, o diagrama minimal do nó trevo (3_1) é o do lado direito e o número de cruzamentos é $C(K) = 3$.

Em geral, não é fácil determinar o número de cruzamentos de alguns diagramas de nós ou enlaces, pois não existe nenhum mecanismo comprovadamente capaz de verificar se um diagrama é mínimo ou não.

3.1.3 Número de Desatamento

Dado um diagrama de nó ou enlace, a alteração da ordem de um dos seus cruzamentos pode gerar o diagrama de um novo nó ou enlace. Nesse caso, se tal alteração produzir um

enlace trivial, chamamos de desatamento. Vejamos a figura a seguir:

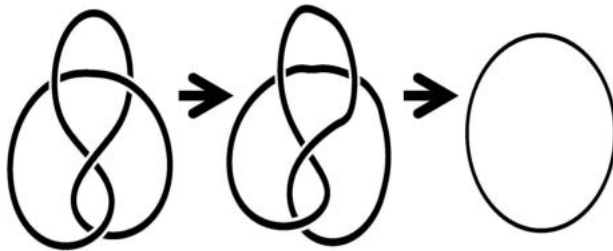


Figura 3.5: Desatamento do diagrama do nó oito.

Para que o número de desatamento seja invariante de classe da isotopia de um nó ou enlace, é necessário que seja mínimo dentre todos os diagramas possíveis.

Definição 3.1.3 *Considere o conjunto D_i de todos os diagramas de um enlace E . O número de desatamento $\mu(E)$ é tal que:*

$$\mu(E) = \min_{D_i} \mu(D_i)$$

Nem sempre o diagrama mínimo de um enlace ou nó é o que apresenta o número de desatamento. Na figura (3.6) temos o diagrama mínimo do nó 10.8 que pode ser desatado alterando três cruzamentos. Por outro lado existe um diagrama desse mesmo nó, com 14 cruzamentos, que desata apenas movendo dois deles.



Figura 3.6: Diagrama minimal do nó 10.8 .

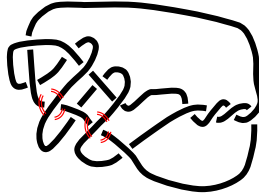


Figura 3.7: Diagrama do nó 10.8 com 14 cruzamentos e $\mu(K) = 2$.

Neste exemplo, conclui-se que $\mu(K) = 2$ é o número de desatamento, embora proveniente de um diagrama que não é mínimo.

Vejamos agora o comportamento do número de desatamento sobre nós compostos.

Proposição 3.1.4 *Considere os nós K_1 e K_2 e sua soma conexa $K_1 \# K_2$. Então,*

$$\mu(K_1 \# K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2).$$

Prova. Considere os diagramas $D(K_1)$, $D(K_2)$ e $D(K_1\sharp K_2)$ de forma que possuam exatamente o número de desatamento de seus respectivos nós. Fazendo $\mu(K_1)$ alterações de cruzamentos em $D(K_1)$ e $\mu(K_2)$ alterações de cruzamentos em $D(K_2)$ obtemos em ambos o nó trivial donde $D(K_1\sharp K_2)$ também será trivial. Logo, $\mu(K_1\sharp K_2) \leq \mu(K_1) + \mu(K_2)$. ■

Esse resultado nos permite enunciar o teorema e o corolário a seguir.

Teorema 3.1.5 *Se um nó K é tal que $\mu(K) = 1$, então K é um nó primo.*

Corolário 3.1.6 *Considere os nós K_1 e K_2 . Se $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 1$, então $\mu(K_1\sharp K_2) = 2$.*

Prova. Pela proposição (3.1.4) temos que $\mu(K_1\sharp K_2) \leq 2 = \mu(K_1) + \mu(K_2)$. Analisemos os casos. Se $\mu(K_1\sharp K_2) = 0$ então $K_1\sharp K_2$ é trivial, donde decorre que K_1 e K_2 são triviais. Isto é impossível pois o número de desatamento de um nó trivial é igual a 0 e $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 1$. Se $\mu(K_1\sharp K_2) = 1$ então, pelo teorema (3.1.5), $K_1\sharp K_2$ é primo, logo K_1 ou K_2 é trivial. Em qualquer situação, um deles terá número de desatamento nulo, contrariando a condição inicial $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 1$. Portanto resta apenas concluir que $\mu(K_1\sharp K_2) = 2$. ■

Feita a devida apresentação dos invariantes considerados clássicos, trataremos agora de mais alguns invariantes utilizados na Teoria dos Nós.

3.2 O Determinante de um Nó

Considerando o diagrama de um nó K com n arcos e cruzamentos, o determinante de K é, na verdade, o determinante da matriz de coeficientes inteiros de um sistema linear com $n - 1$ equações, da forma $r + s - 2w = 0$, associadas aos arcos e cruzamentos do diagrama. A obtenção do determinante de um nó segue as condições estabelecidas abaixo:

- Primeiramente associe a cada arco uma variável. Para cada cruzamento escreva uma equação da forma $r + s - 2w = 0$, onde w representa o arco que passa sobre o cruzamento e r e s os outros dois arcos. Teremos, assim, um sistema de n equações e variáveis.
- Agora tome uma das variáveis e atribua-lhe o valor numérico 0. Em seguida descarte qualquer uma das equações, restando assim um sistema com $n - 1$ equações e variáveis.
- Por fim, escreva a matriz dos coeficientes do novo sistema e calcule o valor absoluto do determinante dessa

matriz. O resultado é o determinante do nó.

Os exemplos abaixo ilustram, passo a passo, os procedimentos para o referido cálculo.

3.2.1 O determinante do nó trevo

Considere o nó trevo na figura.

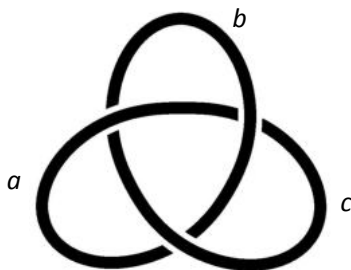


Figura 3.8: Diagrama do nó trevo com variáveis nos arcos.

Primeiramente devemos associar os arcos a letras conforme a figura (3.8). Em seguida montemos um sistema de equações de acordo com os cruzamentos, na forma abaixo:

$$\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ a + c - 2b = 0 \\ b + c - 2a = 0 \end{cases}$$

Fazendo $c = 0$ temos:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 0 \\ b - 2a = 0 \end{cases}$$

Eliminando uma das equações, resta um sistema com duas (neste caso).

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

Por fim, devemos calcular o determinante da matriz associada aos coeficientes do sistema resultante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = -3.$$

O determinante do nó é o módulo do determinante da matriz dos coeficientes, isto é, $D = |-3| = 3$. Mostramos, com isso, que o determinante do nó trevo é igual a 3. ■

3.2.2 O determinante do nó oito

Vejamos agora como calcular o determinante do nó oito.

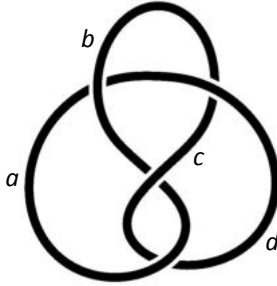


Figura 3.9: Diagrama do nó oito com variáveis nos arcos.

Escrevamos o sistema de equações de acordo com os cruzamentos, na forma:

$$\begin{cases} a + d - 2b = 0 \\ b + c - 2d = 0 \\ c + d - 2a = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Fazendo $d = 0$ temos:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ b + c = 0 \\ c - 2a = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Eliminando a quarta equação e rearranjando o sistema:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ b + c = 0 \\ -2a + c = 0 \end{cases}$$

O determinante da matriz dos coeficientes é dado por:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 5.$$

Dessa forma o determinante do nó oito é $D = |5| = 5$. ■

Esses dois resultados provam que o nó trevo e o nó oito são topologicamente distintos. Não é difícil perceber que, à medida que o nó é mais complexo, o número de arcos (variáveis) será maior, logo, o determinante será mais difícil de calcular. O determinante de um nó é um invariante relativamente simples, obtido de outro mais poderoso, denominado polinômio de Alexander.

3.3 Polinômio de Alexander

O polinômio de Alexander é um invariante atribuído a um nó de forma que, caso esse nó seja transformado em outro por equivalência, ambos possuirão o mesmo polinômio. No entanto, sua eficácia não é completa, isto é, podem existir dois nós não equivalentes com polinômios iguais. Além disso, ele não pode distinguir um nó de sua imagem no espelho, nem de seu inverso.

3.3.1 Calculando o polinômio de Alexander

Assim como o determinante de um nó, o cálculo do polinômio de Alexander é efetuado através do determinante de uma matriz associada a um diagrama, através dos cruzamentos e arcos devidamente legendados. A figura (3.10) ilustra a identificação dos arcos de um diagrama e sua equação associada. Na sequência são descritos os procedimentos para o cálculo.

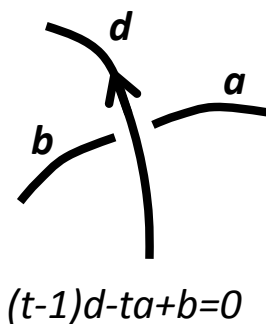


Figura 3.10: Cruzamento associado a uma equação, com arcos identificados.

- 1º passo: escolher um diagrama orientado do nó e identificar os arcos por letras minúsculas.
- 2º passo: escrever uma equação para cada cruzamento conforme o modelo na figura (3.10). Note que as equações serão escritas conforme a linha que passa por cima, à direita e à esquerda do cruzamento, respectivamente.

- 3º passo: atribuir o valor 0 a uma das variáveis e , em seguida, descartar uma das equações do sistema.
- 4º passo: calcular o determinante $\delta(t)$ da matriz de coeficientes do novo sistema.
- 5º passo: multiplicar o determinante $\delta(t)$ por $\pm t^m$, de modo a obter $\Delta(t)$, tal que $\Delta(t) = \Delta(t^{-1})$ e $\Delta(1) = 1$.

3.3.2 Calculando o polinômio de Alexander do nó trevo

Consideremos, por exemplo, um diagrama do nó trevo na figura (3.11) e façamos o cálculo do polinômio de Alexander associado.

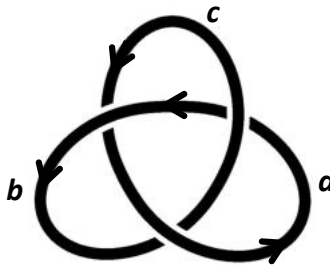


Figura 3.11: Diagrama do nó trevo: D_T

Conforme as instruções, devemos escrever para cada cruzamento uma equação, de acordo com modelo dado na figura

(3.10) e, em seguida, montar um sistema de equações. Para o diagrama (3.11) temos:

$$\begin{cases} (t-1)b - tc + a = 0 \\ (t-1)c - ta + b = 0 \\ (t-1)a - tb + c = 0 \end{cases}$$

Fazendo $a = 0$ e eliminando a terceira equação temos o novo sistema:

$$\begin{cases} (t-1)b - tc = 0 \\ b + (t-1)c = 0 \end{cases}$$

A matriz de coeficientes associada é:

$$\begin{bmatrix} (t-1) & -t \\ 1 & (t-1) \end{bmatrix}.$$

Logo:

$$\delta(t) = \det \begin{bmatrix} (t-1) & -t \\ 1 & (t-1) \end{bmatrix} = t^2 - t + 1.$$

Finalmente, devemos encontrar $\Delta_{D_T}(t)$ tal que $\Delta_{D_T}(t) = \Delta_{D_T}(t^{-1})$ e $\Delta_{D_T}(1) = 1$. Multiplicando $\delta(t)$ por t^{-1} obtemos:

$$\Delta_{D_T}(t) = t^{-1}\delta(t) = t^{-1}[t^2 - t + 1] \implies$$

$$\Delta_{D_T}(t) = t - 1 + t^{-1}. \quad (3.1)$$

A expressão (3.1) é o polinômio de Alexander do nó trevo. ■

3.3.3 Calculando o polinômio de Alexander do nó trevo de 4 cruzamentos

Consideremos agora, a título de comparação, um diagrama do nó trevo com 4 cruzamentos. Vejamos o que ocorre com seu polinômio de Alexander.

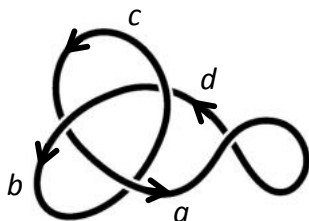


Figura 3.12: Diagrama do nó trevo com 4 cruzamentos.

As equações associadas são:

$$\begin{cases} (t-1)c - td + b = 0 \\ (t-1)b - tc + a = 0 \\ (t-1)a - tb + c = 0 \\ (t-1)a - ta + d = 0 \end{cases}$$

Fazendo $a = 0$ e descartando a quarta equação temos:

$$\begin{cases} b + (t-1)c - td = 0 \\ (t-1)b - tc = 0 \\ -tb + c = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é:

$$\begin{bmatrix} 1 & (t-1) & -t \\ (t-1) & -t & 0 \\ -t & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \delta_1(t) &= \det \begin{bmatrix} 1 & (t-1) & -t \\ (t-1) & -t & 0 \\ -t & 1 & 0 \end{bmatrix} = t^3 - t^2 + t \\ &= t[t^2 - t + 1] = +t^1[t^2 - t + 1]. \end{aligned}$$

Note que este resultado é múltiplo daquele encontrado para o diagrama da figura (3.11). Para encontrarmos o polinômio de Alexander $\Delta_1(t)$ tal que $\Delta_1(t) = \Delta_1(t^{-1})$ e $\Delta_1(1) = 1$, basta multiplicar o $\delta_1(t)$ por t^{-2} :

$$\Delta_1(t) = t^{-2}\delta_1(t) = t^{-2}[t^3 - t^2 + t] \implies$$

$$\Delta_1(t) = t - 1 + t^{-1} = \Delta_{D_T}(t), \quad (3.2)$$

que equivale à expressão (3.1) encontrada anteriormente. ■

Mesmo sem utilizar diagramas distintos, o resultado de $\delta_1(t)$ depende da escolha da variável para igualar a 0 e da equação descartada. Os exemplos supracitados dos diagramas (3.11) e (3.12) do nó trevo são casos particulares do seguinte teorema:

Teorema 3.3.1 *Se o polinômio de Alexander de um nó é computado utilizando dois conjuntos distintos de diagramas, os dois polinômios diferenciam-se através de múltiplos de $\pm t^k$, para algum inteiro k .*

Este teorema caracteriza uma fraqueza do polinômio de Alexander: ele não distingue um nó de sua imagem no espelho ou de seu inverso. De fato, seja D_K o diagrama de um nó (ou enlace) orientado. Então, a imagem refletida $D_{\bar{K}}$ e o inverso D_{-K} possuem o mesmo polinômio de Alexander de K a menos de um fator multiplicativo. Não é difícil verificar essa propriedade para nós mais simples com poucos cruzamentos.

3.3.4 Calculando o polinômio de Alexander do nó oito

Calculemos agora o polinômio de Alexander do nó oito.

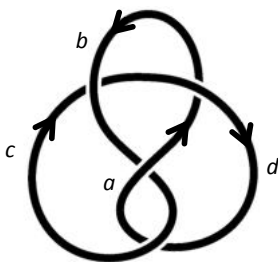


Figura 3.13: Diagrama do nó oito: D_E

Considere o diagrama (3.13). Conforme as instruções, devemos escrever para cada cruzamento uma equação, de acordo com modelo dado na figura (3.10). Em seguida, montar um sistema de equações na forma:

$$\begin{cases} (t-1)a - tc + b = 0 \\ (t-1)c - ta + d = 0 \\ (t-1)d - ta + b = 0 \\ (t-1)b - tc + d = 0 \end{cases}$$

Fazendo $a = 0$ e eliminando a quarta equação temos o novo sistema:

$$\begin{cases} b - tc = 0 \\ (t-1)c + d = 0 \\ b + (t-1)d = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & (t-1) & 1 \\ 1 & 0 & (t-1) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\delta(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & (t-1) & 1 \\ 1 & 0 & (t-1) \end{bmatrix} = t^2 - 3t + 1.$$

Finalmente, devemos achar $\Delta_{D_E}(t)$ tal que $\Delta_{D_E}(t) = \Delta_{D_E}(t^{-1})$ e $\Delta_{D_E}(1) = 1$. Multiplicando $\delta(t)$ por $-t^{-1}$ obtemos:

$$\Delta_{D_E}(t) = -t^{-1}\delta(t) = -t^{-1}[t^2 - 3t + 1] \implies$$

$$\Delta_{D_E}(t) = -t + 3 - t^{-1}. \quad (3.3)$$

Portanto, a equação (3.3) é o polinômio de Alexander do nó oito. ■

Para o caso em que o nó é trivial convencionou-se que o polinômio de Alexander é igual a 1.

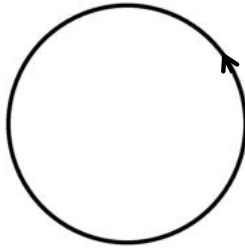


Figura 3.14: Diagrama do nó trivial: $\Delta_{Trivial}(t) = 1$.

O teorema abaixo explicita algumas propriedades importantes do polinômio de Alexander.

Teorema 3.3.2 *Seja K um nó orientado e $\Delta_K(t)$ o seu polinômio de Alexander associado. Então, $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ e $\Delta_K(1) = \pm 1$.*

Este teorema já foi utilizado anteriormente sob forma de

exemplos e estabelece a condição final para que o polinômio $\Delta_K(t)$ seja o polinômio de Alexander do nó dado. Como consequência deste teorema temos o

Corolário 3.3.3 *Para qualquer nó K*

$$\Delta_K(t) = a_0 + a_1(t^{-1} + t) + a_2(t^{-2} + t^2) + \dots$$

onde a_i são inteiros e a_0 é ímpar.

O polinômio de Alexander, assim como outros invariantes conhecidos, não é completo. Já sabemos, por exemplo, que o seu resultado para o nó trivial é $\Delta_{Trivial}(t) = 1$ e que existe pelo menos outro nó distinto com o mesmo polinômio associado $\Delta_{D_k}(t) = 1$. Veja a figura abaixo:

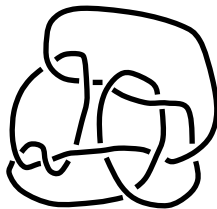
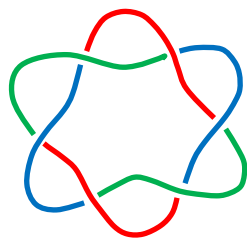


Figura 3.15: Diagrama do nó K com 11 cruzamentos e $\Delta_{D_K}(t) = 1$. (*LIVINGSTON, 1993*)

Neste caso, o polinômio de Alexander falha na verificação ao indicar, erroneamente, que o nó da figura (3.15) e o nó trivial são equivalentes.

É fundamental ressaltar que existem invariantes mais eficientes e complexos que o polinômio de Alexander, a exemplo, o polinômio de Conway, o polinômio de Jones, polinômio de Homfly, polinômio de Kauffman, grupo fundamental, dentre outros. No entanto, sua eficácia é cobrada na complexidade da implementação, logo, dado o caráter introdutório deste livro, não serão estudados aqui.

No capítulo a seguir serão apresentadas sugestões de atividades com a Teoria do Nós para o Ensino Fundamental e Médio.



Capítulo 4

Teoria dos Nós e o Ensino Fundamental e Médio

É possível estudar a Teoria dos Nós no ensino básico? Analisando o currículo de Matemática das escolas no Brasil, percebemos que a maior parte concentra-se em Aritmética, Álgebra e Geometria. Nesta última, particularmente, nota-se que o manuseio das formas geométricas físicas é bastante limitado pois, no geral, as aulas são focadas em muitas demonstrações, exercícios de cálculo e poucas construções. Parte disso justifica-se na correria do próprio currículo escolar, que não reserva tempo para uma aprendizagem mais livre e autônoma mas, claramente, essa restrição facilita a existência de lacunas no processo. Nesse contexto, o estudo dos nós pode

potencializar a metodologia docente, ao permitir aplicações conceituais de natureza matemática e estimular a manipulação geométrica, pois, sua compreensão depende também da construção de modelos físicos. Portanto, a visita dos nós matemáticos ao ensino básico promove o fortalecimento das relações entre teoria e prática nas aulas e, conseqüentemente, contribui para o sucesso da aprendizagem.

A experiência de inserir os nós matemáticos no Ensino Fundamental e Médio materializou-se, em 2014, no Colégio Estadual Manoel Alcino do Nascimento em Graccho Cardoso-SE. Na época, sob a supervisão deste autor, vários alunos da instituição tiveram a oportunidade de integrar, de forma altruísta e eufórica, um pioneiro grupo de estudos sobre o tema. Os resultados obtidos demonstraram a viabilidade didático-pedagógica da pesquisa.

O contato com a Teoria dos Nós implica na percepção imediata de que não é um tema trivial. Essa sensação começa desde o momento em que definimos um nó e aumenta gradativamente com o desenvolvimento textual na direção da topologia algébrica e combinatória. Contudo, também é inteligível a presença de conceitos típicos do ensino básico, como a Álgebra Linear das matrizes, os polinômios e as manipulações associadas à Geometria Euclidiana. Tais conexões são, notadamente, suficientes para justificar a existência deste modesto livro.

4.1 Estudando nós e diagramas

Uma das grandes vantagens de estudar os nós reside no fato de que podemos construir modelos físicos. Em particular, no Ensino Fundamental e Médio, é suficiente analisar alguns deles com uma quantidade pequena de cruzamentos para uma manipulação leve e acessível ao estudante. Abaixo, algumas sugestões de diagramas para desenho e construção:



Figura 4.1:
Nó 3.1.



Figura 4.2:
Nó 5.1

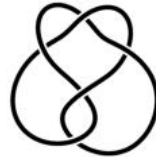
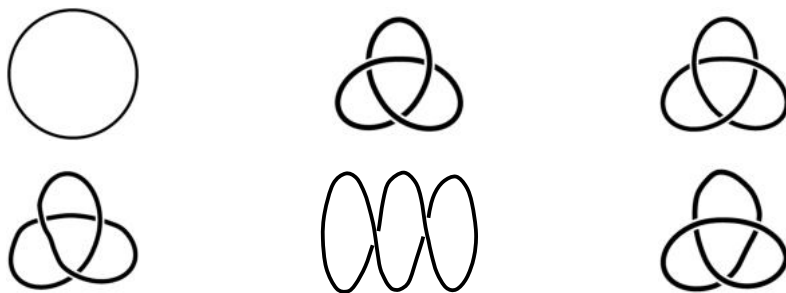


Figura 4.3:
Nó 5.2

Com a aplicação das atividades em sala de aula é importante elaborar uma planilha de acompanhamento. Se o professor achar conveniente pode estabelecer divisões em grupos.

4.1.1 Sugestões de atividades para o Ensino Fundamental e Médio

- 1ª aula: desenhar o nó trivial e alguns nós de três cruzamentos, podendo ser, por exemplo, o trevo e sua imagem espelhada e o próprio trivial com dois ou três cruzamentos. O objetivo é verificar diferenças e equivalência.



As imagens a seguir são provenientes de aulas no Ensino Fundamental do Colégio Estadual Manoel Alcino do Nascimento localizado em Graccho Cardoso - SE.

- Tarefa realizada: Desenhar o nó trivial e alguns nós de dois e três cruzamentos. O objetivo: observar as diferenças.



Figura 4.4:
Nó trivial.



Figura 4.5:
Nó trevo.



Figura 4.6:
Nó trevo.



Figura 4.7:
Nó trivial
cruzado.

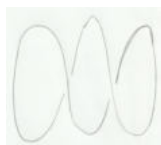


Figura 4.8:
Nó trivial
cruzado.



Figura 4.9:
Nó trivial
cruzado.

As imagens (4.5) e (4.6) são esboços do nó trevo com cruzamentos trocados, enquanto as imagens (4.4), (4.7), (4.8) e

(4.9) são diagramas do nó trivial. Nota-se que o trivial pode apresentar alguns cruzamentos aparentes que podem ser facilmente desfeitos por movimentos de Reidemeister. A figura (4.8) por exemplo, ilustra uma torção aplicada sobre o diagrama (4.4).

- 2ª aula: identificar nós não equivalentes ao trivial e pensar em possíveis formas de torná-los triviais alterando cruzamentos.

Nessa aula os alunos foram capazes de notar que o desatamento é feito por alterações de cruzamentos e, mesmo que o nó seja rompido no processo, é necessário unir novamente as pontas soltas sob pena de violar a definição formal.



Figura 4.10: Desatamento no cruzamento do lado direito resultando no nó trivial.

- 3ª aula: a tarefa é construir modelos físicos dos diagramas através de fios elétricos com certa rigidez torcional. O objetivo é a manipulação dos nós em três dimensões.



Figura 4.11: Modelos físicos de nós produzidos no CEMAN

- 4ª aula: utilizar os modelos construídos para aplicar movimentos e deformações. Diagramar os resultados.

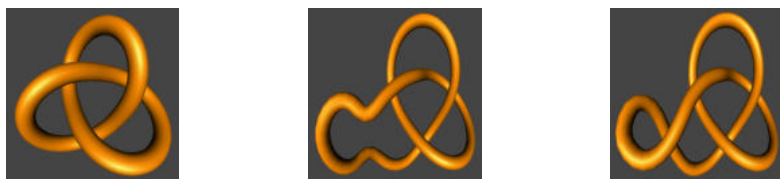


Figura 4.12: Exemplo de deformação sobre um nó

- 5ª aula: apresentar os movimentos de Reidemeister e aplicar sobre os modelos construídos.

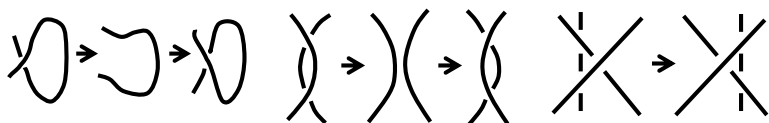


Figura 4.13: Movimentos de Reidemeister

- 6ª aula: expandir o conceito de nó para enlace.

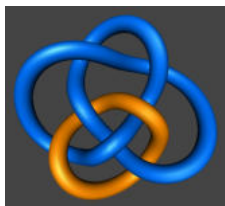


Figura 4.14: Enlace 7.2.6



Figura 4.15: Diagrama 7.2.6

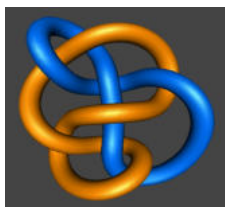


Figura 4.16: Enlace 8.2.8



Figura 4.17: Diagrama 8.2.8

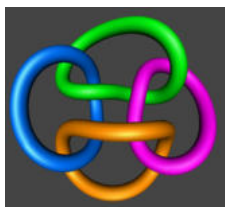


Figura 4.18: Enlace 8.4.2



Figura 4.19: Diagrama 8.4.2

Os diagramas apresentados nas figuras (4.15), (4.17) e (4.19) foram produzidos por alunos em sala de aula.

Conforme supracitado, estas são apenas algumas sugestões para inserção de conceitos da Teoria dos Nós no Ensino Fundamental e Médio. Conjuntamente, foram apresentados alguns diagramas produzidos por alunos durante as aulas. A realização dessas tarefas possibilita a compreensão de fundamentos importantes, tais como o significado do nó trivial sendo o resultado do processo de desatamento de um nó qualquer e a enumeração que indica cruzamentos, componentes (no caso dos enlaces) e posições nas tabelas.

4.2 Estudando os invariantes

Dando continuidade à nossa tarefa de apresentar tópicos da Teoria dos Nós no ensino básico, trataremos agora da possibilidade de estudar alguns invariantes. Recapitulando, um invariante pode ser pensado como uma propriedade que é comum a alguns nós e a outros não, de forma que, se dois nós são equivalentes possuem um mesmo invariante. Note que a recíproca não é verdadeira, isto é, a igualdade dos invariantes de dois nós nem sempre garante que eles sejam equivalentes. Por outro lado se dois nós possuem invariantes (do mesmo tipo) distintos, conclui-se que não são equivalentes.

4.2.1 Tópicos de Tricolorabilidade

A tricolorabilidade é um invariante clássico que pode ser apresentado ao Ensino Fundamental e Médio, já que não apresenta pré-requisitos complexos. Recordemos aqui o conceito de tricolorabilidade.

Definição 4.2.1 *Um diagrama de nó é tricolor se:*

1. *cada arco possui uma cor;*
2. *utiliza no mínimo duas e no máximo três cores;*
3. *para cada cruzamento, ou todos os arcos tem a mesma cor ou possuem três cores.*

Sugestão de atividades

- 1ª aula: apresentar algumas figuras pintadas e verificar se são tricolores. O objetivo dessa aula é fazer o aluno compreender que a tricolorabilidade não é simplesmente pintar um diagrama com três cores. É necessário compreender também as relações existentes entre os cruzamentos.

A seguir, a figura (4.20) é tricolor, enquanto as figuras (4.21) e (4.22) não são tricolores.

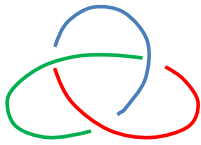


Figura 4.20:

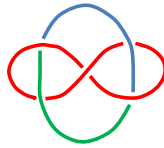


Figura 4.21:

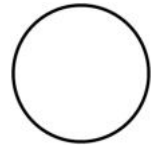


Figura 4.22:

- 2ª aula: apresentar alguns diagramas e solicitar que os alunos efetuem a tricoloração, separando os diagramas onde é possível e impossível fazê-la.
- 3ª aula: verificar, realizando algumas deformações, que os diagramas tricolores não são equivalentes ao nó trivial.

Essas atividades podem ser aplicadas ao Ensino Fundamental e Médio. Caso o professor queira, pode estender ao Ensino Médio a tricolorabilidade para alguns enlaces simples. A ideia geral proposta aqui é permitir que o aluno compreenda o significado matemático de um invariante e enxergue a tricolorabilidade dentro deste conceito ao concluir que nós tricolores não podem ser triviais.

4.2.2 Número de Cruzamentos

O número de cruzamentos também é um invariante que pode ser tratado no ensino básico. Sabemos que nem sempre

é tarefa fácil determinar o diagrama mínimo de um nó e que, por definição, o número de cruzamentos deve ser mínimo para ser invariante. Dessa forma, as tarefas com número de cruzamentos devem ser focadas em diagramas simples, mínimos e não mínimos. Observemos as figuras:



Figura 4.23:
3 cruza-
mentos



Figura 4.24:
trevo com 5
cruzamentos



Figura 4.25:
10 cruza-
mentos

O diagrama (4.25) é o minimal referente ao nó 10.117 e possui 10 cruzamentos. Note que não é uma tarefa simples verificar se este é o menor número de cruzamentos, portanto devemos evitar este tipo de exemplo para não comprometer a aprendizagem. Por outro lado, as figuras (4.23) e (4.24) são diagramas distintos do trevo que apresentam respectivamente, 3 e 5 cruzamentos. Logo, o número de cruzamentos do trevo é igual a 3, pois refere-se a seu diagrama minimal.

Sugestão de atividades

- Comparar diversos diagramas com o nó trivial. A tarefa deve permitir que os alunos compreendam o número de cruzamentos como invariante.

4.2.3 Número de Desatamento

Conforme definido no capítulo 3, o número de desatamento de um nó K é a menor quantidade possível de alterações na ordem dos cruzamentos que possam transformá-lo no nó trivial. É importante salientar que o número de desatamento de um nó, não é necessariamente, o número de desatamento de seu diagrama minimal. Também não é fácil determinar esse número, logo, qualquer atividade deve ser conduzida com cautela. Novamente, recomenda-se a utilização de nós mais simples para uma manipulação natural.



Figura 4.26:
Nó 3_1



Figura 4.27:
 $\mu(3_1) = 1$



Figura 4.28:
 $\mu(4_1) = 1$

O nó da figura (4.27) é o desatado do nó da figura (4.26). É importante, neste caso, utilizar modelos físicos além dos diagramas. Dessa forma a turma poderá compreender melhor a limitação dos nós não equivalentes ao trivial. Além disso, fica claro ao manipular um modelo físico não trivial, que o nó precisa ser rompido para alterar a ordem de um dado cruzamento e que após esse procedimento obtém-se um outro nó. Compreender este invariante significa dizer que, se dois nós

são equivalentes, possuem o mesmo número de desatamento. Contudo, assim como ocorre com outros invariantes numéricos, não vale a recíproca, isto é, ter o mesmo número de desatamento não garante a equivalência. Podemos ver nas figuras (4.27) e (4.28) que o nó trevo possui número de desatamento $\mu(3_1) = 1$, enquanto o nó oito também possui o mesmo número de desatamento $\mu(4_1) = 1$ e, notoriamente, não são equivalentes. Por outro lado, se dois diagramas apresentam números de desatamento distintos, garantidamente estes nós não são equivalentes. Como exemplo, o nó trivial tem número de desatamento $\mu(0_1) = 0$, logo, conclui-se que não é equivalente ao nó trevo que possui desatamento $\mu(3_1) = 1$.

Sugestão de atividades

- Montar modelos físicos e organizar um jogo de desatamento onde nós são escolhidos para os alunos desatarem. Ganha o aluno ou equipe que concluir primeiro a tarefa.

4.2.4 Calculando o Determinante de um Nó

Como já sabemos, o determinante de um nó é um invariante calculado através do determinante de uma matriz, devidamente construída a partir de equações dos arcos e cruzamen-

tos do nó. Este tipo de invariante deve ser estudado no Ensino Médio, após a devida apresentação dos conteúdos matrizes, determinantes e sistemas lineares.

Sugestão de atividades

- 1ª aula: calcular o determinante do nó trevo. Primeiramente devemos associar os arcos a letras conforme a figura (4.29).

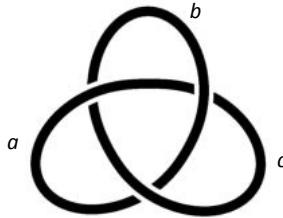


Figura 4.29: Diagrama do nó trevo com variáveis nos arcos.

Para cada cruzamento, escrever uma equação da forma $r + s - 2w = 0$ onde w representa o arco que passa sobre o cruzamento e r e s os outros dois arcos. Em seguida, montar um sistema de equações com as incógnitas associadas da forma abaixo.

$$\begin{cases} a + b - 2c = 0 \\ a + c - 2b = 0 \\ b + c - 2a = 0 \end{cases}$$

Fazendo $c = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 0 \\ b - 2a = 0 \end{cases}$$

Eliminando-se uma das equações, resta um novo sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 0 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é dada por:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por fim, devemos calcular o determinante da matriz dos coeficientes do sistema. O determinante de uma matriz 2×2 é o resultado da subtração entre o produto dos números da diagonal principal e o produto dos números da diagonal secundária.

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}$$

$$\det K = 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 = -2 - 1 = -3.$$

O determinante do nó é o módulo do determinante da ma-

triz dos coeficientes, isto é,

$$|\det K| = |-3| = 3. \blacksquare$$

- 2ª aula: calcular o determinante do nó oito.

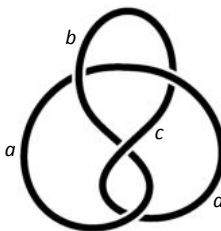


Figura 4.30: Diagrama do nó oito com variáveis nos arcos.

Escrevamos o sistema de equações da forma:

$$\begin{cases} a + d - 2b = 0 \\ b + c - 2d = 0 \\ c + d - 2a = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Fazendo $d = 0$, tem-se:

$$\begin{cases} a - 2b = 0 \\ b + c = 0 \\ c - 2a = 0 \\ a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

Eliminando a quarta equação e rearranjando o sistema:

$$\begin{cases} a - 2b & = 0 \\ & b + c = 0 \\ -2a & + c = 0 \end{cases}$$

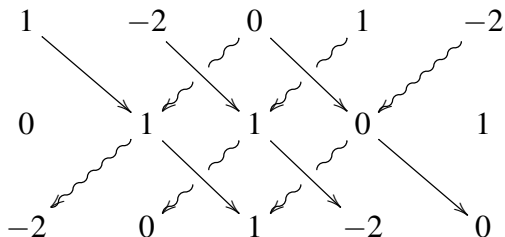
Devemos calcular o determinante da matriz dos coeficientes:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O determinante de uma matriz 3×3 pode ser obtido através da Regra de Sarrus, com as instruções abaixo.

- Repete-se as duas primeiras colunas do lado direito da terceira coluna. Aparecerão três diagonais principais (seta reta) e três diagonais secundárias (seta ondulada), conforme a diagramação abaixo.
- Multiplica-se os três números de cada uma dessas diagonais, gerando três produtos na direção das diagonais principais e três produtos na direção das secundárias.
- Os produtos obtidos na direção da diagonal principal conservam o mesmo sinal, enquanto os produtos obtidos da direção da diagonal secundária mudam de sinal. Efetua-se a soma destes valores, cujo resultado é o determinante da matriz.

Façamos conforme as instruções. Primeiramente repetimos as duas primeiras colunas e marquemos as diagonais:



As diagonais principais foram marcadas por setas retas e as diagonais secundárias por setas curvilíneas. Efetuando o produto dos termos de números de cada diagonal, tem-se:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{seta reta} & & \text{seta reta} & & \text{seta reta} & & \\
 \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1} & + & \underbrace{(-2) \cdot 1 \cdot (-2)} & + & \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0} & & \\
 1 & + & 4 & + & 0 & & = 5. \\
 \text{seta curva} & & \text{seta curva} & & \text{seta curva} & & \\
 - \underbrace{(-2) \cdot 0 \cdot 1} - & & \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 0} & & - \underbrace{0 \cdot 1 \cdot (-2)} & & \\
 - 0 - & & 0 & & - 0 & &
 \end{array}$$

Dessa forma o determinante da matriz K é $\det K = 5$, e o determinante do nó é o módulo do determinante da matriz, isto é, $|\det K| = |5| = 5$. ■

- 3ª aula: calcular o determinante do nó na figura (4.31).

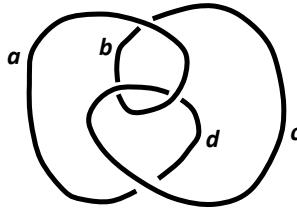


Figura 4.31: Nó W com 4 cruzamentos.

A partir da figura (4.31) podemos escrever o seguinte sistema de equações associadas aos arcos e cruzamentos:

$$\begin{cases} b + c - 2a = 0 \\ a + b - 2c = 0 \\ c + d - 2a = 0 \\ a + d - 2c = 0 \end{cases}$$

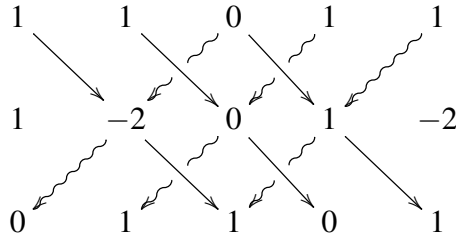
Fazendo $a = 0$ e eliminando a quarta equação, temos:

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ b - 2c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases}$$

A matriz dos coeficientes é, então:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a regra de Sarrus:



Efetuando o produto dos termos de números de cada diagonal, tem-se:

$$\begin{array}{r}
 \text{seta reta} \quad \text{seta reta} \quad \text{seta reta} \\
 \underbrace{1 \cdot (-2) \cdot 1}_{-2} + \underbrace{1 \cdot 0 \cdot 0}_0 + \underbrace{0 \cdot 1 \cdot 1}_0 \\
 \quad \quad \quad + \quad \quad \quad + \quad \quad \quad = -3. \\
 \text{seta curva} \quad \text{seta curva} \quad \text{seta curva} \\
 - \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1}_1 - \underbrace{1 \cdot 0 \cdot 1}_0 - \underbrace{0 \cdot (-2) \cdot 0}_0 \\
 - \quad \quad \quad - \quad \quad \quad - \quad \quad \quad
 \end{array}$$

O determinante do nó W é:

$$\det(W) = |\det K| = |-3| = 3. \blacksquare$$

Observando os diagramas das figuras (4.29) e (4.31) notamos que, em ambos os casos, o determinante do nó é igual a 3. Tal fato não é uma coincidência pois são dois diagramas equivalentes do nó trevo, cuja transformação através de movimentos de Reidemeister pode ser vista na figura (2.20) do

capítulo 2 deste livro. Com efeito, dois diagramas equivalentes terão o mesmo invariante determinante de um nó, contudo, a recíproca não é verdadeira, isto é, o fato de terem o mesmo determinante não é garantia de equivalência. Por outro lado, vemos que a figura (4.29) tem determinante 3 enquanto a figura (4.30) tem determinante 5, o que prova matematicamente que o nó trevo e o nó oito são distintos. De fato, se dois nós possuem determinantes diferentes, não podem ser equivalentes. Não é difícil perceber que, à medida que o número de arcos (variáveis) for maior, o cálculo será consideravelmente mais complexo.

As tarefas relacionadas a esse invariante são, essencialmente, a construção de sistemas lineares e o cálculo do determinante de uma matriz. É recomendável escolher diagramas com quantidade pequena de cruzamentos, para não tornar a tarefa demasiadamente intrincada. Como dito anteriormente, o determinante de um nó é derivado de um invariante mais potente denominado polinômio de Alexander.

4.2.5 Calculando o Polinômio de Alexander

Assim como o determinante do nó, o polinômio de Alexander é um invariante que pode ser tratado no Ensino Médio (com alguns cuidados). Para isso é necessário que o aluno detenha os conceitos de matrizes, determinantes, sistemas li-

neares e polinômios. Por ser um invariante mais poderoso, o seu cálculo é mais sutil, de modo que devemos considerar um diagrama orientado e associar arcos e cruzamentos a equações da forma $(t - 1)d - ta + b = 0$, conforme a figura (4.32) abaixo.

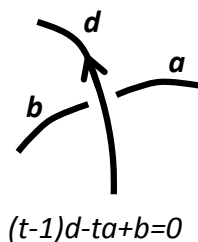


Figura 4.32: Equação dos arcos e cruzamentos.

Relembrando o cálculo do polinômio de Alexander:

- 1º passo: escolher um diagrama orientado do nó e identificar os arcos por letras minúsculas.
- 2º passo: escrever uma equação para cada cruzamento conforme o modelo na figura (4.32). Note que as equações serão escritas conforme a linha que passa por cima, à direita e à esquerda do cruzamento, respectivamente.
- 3º passo: atribuir o valor 0 a uma das variáveis e, em seguida, descartar uma das equações do sistema.

- 4º passo: calcular o determinante $\delta(t)$ da matriz de coeficientes desse novo sistema.
- 5º passo: multiplicar o determinante $\delta(t)$ por $\pm t^m$, de modo a obter $\Delta(t)$, tal que $\Delta(t) = \Delta(t^{-1})$ e $\Delta(1) = 1$.

Sugestão de atividades

- 1ª aula: calcular o polinômio de Alexander do nó da figura (4.33).

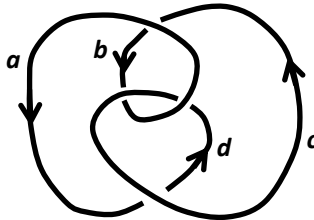


Figura 4.33: Diagrama orientado de 4 cruzamentos.

Primeiramente escrevamos um sistema de equações na forma:

$$\begin{cases} (t-1)a - tc + b = 0 \\ (t-1)a - td + c = 0 \\ (t-1)c - tb + a = 0 \\ (t-1)c - ta + d = 0 \end{cases}$$

Fazendo $a = 0$ e eliminando a quarta equação do sistema:

$$\begin{cases} b - tc = 0 \\ c - td = 0 \\ -tb + (t-1)c = 0 \end{cases}$$

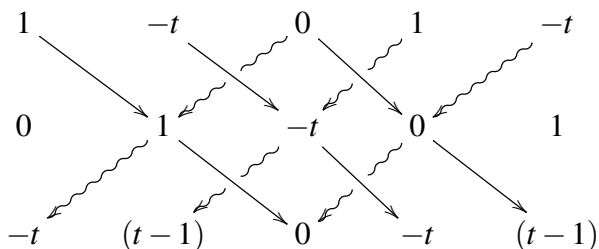
A matriz dos coeficientes é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ -t & (t-1) & 0 \end{bmatrix}.$$

E o determinante da matriz de coeficientes é:

$$\delta(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & 1 & -t \\ -t & (t-1) & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante pela regra de Sarrus, primeiramente repetimos as duas primeiras colunas e marquemos as diagonais como mostra a ilustração abaixo:



As diagonais principais foram marcadas por setas retas e as diagonais secundárias por setas curvilíneas. Efetuando o pro-

duto dos ternos de cada diagonal, tem-se:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{seta reta} & & \text{seta reta} & & \text{seta reta} & & \\
 \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 0} & + & \underbrace{(-t) \cdot (-t) \cdot (-t)} & + & \underbrace{0 \cdot 0 \cdot (t-1)} & & \\
 0 & - & t^3 & + & 0 & & \\
 & & & & & & = \delta(t). \\
 \text{seta curva} & & \text{seta curva} & & \text{seta curva} & & \\
 - \underbrace{(-t) \cdot 0 \cdot 0} & - & \underbrace{1 \cdot (-t) \cdot (t-1)} & - & \underbrace{0 \cdot 1 \cdot (-t)} & & \\
 - 0 & + & t^2 - t & - & 0 & &
 \end{array}$$

Dessa maneira, conclui-se que:

$$\delta(t) = -t^3 + t^2 - t = -t^1(t^2 - t + 1). \quad (4.1)$$

Note que $\delta(t)$ é múltiplo de $(t^2 - t + 1)$. Finalmente, devemos encontrar $\Delta_D(t)$ tal que $\Delta_D(t) = \Delta_D(t^{-1})$ e $\Delta_D(1) = 1$. Multiplicando $\delta(t)$ por $-t^{-2}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Delta_D(t) &= -t^{-2}\delta(t) = -t^{-2}[-t^3 + t^2 - t] \implies \\
 \Delta_D(t) &= t - 1 + t^{-1}. \quad \blacksquare \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

O resultado acima é o polinômio de Alexander do nó.

A esta altura dos fatos o leitor já sabe que o diagrama de nó representado na figura (4.33) é equivalente a um nó trevo com quatro cruzamentos. Vejamos o que acontece quando calculamos o polinômio de Alexander de um diagrama minimal

do trevo, que possui três cruzamentos.

- 2ª aula: considerando o diagrama do nó trevo na figura (4.34), calcular o polinômio de Alexander associado.

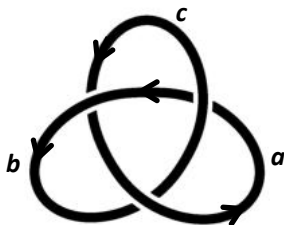


Figura 4.34: Diagrama do nó trevo: D_T

Conforme as instruções, devemos escrever para cada cruzamento uma equação de acordo com modelo dado na figura (4.32). Em seguida devemos escrever um sistema de equações. Para o diagrama (4.34) temos:

$$\begin{cases} (t-1)b - tc + a = 0 \\ (t-1)c - ta + b = 0 \\ (t-1)a - tb + c = 0 \end{cases}$$

Fazendo $a = 0$ e eliminando a terceira equação escrevemos o novo sistema:

$$\begin{cases} (t-1)b - tc = 0 \\ b + (t-1)c = 0 \end{cases}$$

A matriz associada é:

$$\begin{bmatrix} (t-1) & -t \\ 1 & (t-1) \end{bmatrix}.$$

E o determinante da matriz:

$$\delta(t) = \det \begin{bmatrix} (t-1) & -t \\ 1 & (t-1) \end{bmatrix}.$$

Trata-se do determinante de uma matriz de ordem 2, logo, é suficiente subtrair os produtos das diagonais principal e secundária, isto é:

$$\delta(t) = (t-1) \cdot (t-1) - (-t) \cdot 1 = t^2 - 2t + 1 + t = t^2 - t + 1. \quad (4.3)$$

Finalmente, devemos achar $\Delta_{D_T}(t)$ tal que $\Delta_{D_T}(t) = \Delta_{D_T}(t^{-1})$ e $\Delta_{D_T}(1) = 1$. Multiplicando $\delta(t)$ por t^{-1} obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta_{D_T}(t) &= t^{-1}\delta(t) = t^{-1}[t^2 - t + 1] \implies \\ \Delta_{D_T}(t) &= t - 1 + t^{-1}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

concluindo a resolução do problema. ■

Note que o polinômio na equação (4.3) do nó trevo acima é múltiplo do polinômio de Alexander na equação (4.1) do nó 4.33. Além disso, as equações (4.2) e (4.4) são exatamente iguais. Isso ocorre porque o diagrama (4.33) é, na verdade, equivalente ao nó trevo em (4.34). Tal fato é justificado pelo teorema (3.3.1) no capítulo 3.

- 3ª aula: calcular o polinômio de Alexander associado ao nó 8 na figura (4.35) abaixo.

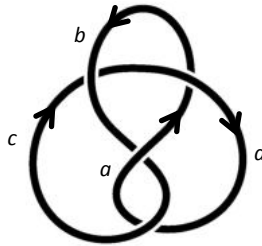


Figura 4.35: Diagrama do nó oito: D_E

Conforme as instruções, devemos escrever um sistema de equações para os cruzamentos de acordo com modelo dado na figura (4.32).

$$\left\{ \begin{array}{l} (t-1)a - tc + b = 0 \\ (t-1)c - ta + d = 0 \\ (t-1)d - ta + b = 0 \\ (t-1)b - tc + d = 0 \end{array} \right.$$

Fazendo $a = 0$ e eliminando a quarta equação temos o novo sistema:

$$\begin{cases} b - tc & = 0 \\ (t-1)c + d & = 0 \\ b + (t-1)d & = 0 \end{cases}$$

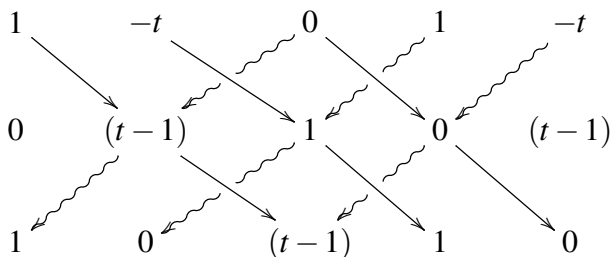
A matriz associada é:

$$\begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & (t-1) & 1 \\ 1 & 0 & (t-1) \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\delta(t) = \det \begin{bmatrix} 1 & -t & 0 \\ 0 & (t-1) & 1 \\ 1 & 0 & (t-1) \end{bmatrix}.$$

Calculando o determinante pela regra de Sarrus, primeiramente repetimos as duas primeiras colunas e marquemos as diagonais como mostra a ilustração abaixo:



As diagonais principais foram marcadas por setas retas e as diagonais secundárias por setas curvilíneas. Efetuando o produto dos termos de cada diagonal, tem-se:

$$\begin{array}{rcc}
 \text{seta reta} & \text{seta reta} & \text{seta reta} \\
 \underbrace{1 \cdot (t-1) \cdot (t-1)}_{t^2 - 2t + 1} + \underbrace{(-t) \cdot 1 \cdot 1}_t + \underbrace{0 \cdot 0 \cdot 0}_0 \\
 \text{seta curva} & \text{seta curva} & \text{seta curva} \\
 - \underbrace{(-t) \cdot 0 \cdot (t-1)}_0 - \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 0}_0 - \underbrace{0 \cdot (t-1) \cdot 1}_0
 \end{array}$$

$$= t^2 - 3t + 1.$$

Dessa maneira, conclui-se que:

$$\delta(t) = t^2 - 3t + 1. \quad (4.5)$$

Finalmente, devemos achar $\Delta_{D_E}(t)$ tal que $\Delta_{D_E}(t) = \Delta_{D_E}(t^{-1})$ e $\Delta_{D_E}(1) = 1$. Multiplicando $\delta(t)$ por $-t^{-1}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{D_E}(t) &= -t^{-1}\delta(t) = -t^{-1}[t^2 - 3t + 1] \implies \\
 \Delta_{D_E}(t) &= -t + 3 - t^{-1}. \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Logo, a equação (4.6) é o polinômio de Alexander do nó oito.

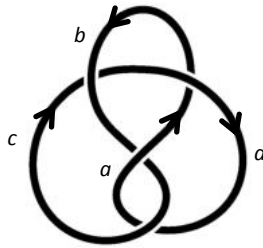
■

Observando os polinômios de Alexander do nó trevo na

equação (4.4) e do nó oito na equação (4.6) conclui-se que são distintos e, portanto, esses dois nós não são equivalentes.

A apresentação do polinômio de Alexander evidencia a importância do estudo de polinômios, haja vista que é um conteúdo tratado de maneira bastante teórica no Ensino Médio e que sempre gera discussões acerca de sua aplicabilidade. Assim como o determinante, o cálculo deste invariante pode se tornar imenso se utilizarmos nós com muitos arcos e cruzamentos, logo, é recomendável que os trabalhos em sala de aula sejam conduzidos através de comparações com o trivial, o trevo e o oito.

A Teoria dos Nós é uma área de colossal complexidade e amplitude científica. A pretensão deste modesto livro é, somente, apresentar notas introdutórias didaticamente adaptadas para o ensino básico que, obrigatoriamente, preservam uma gigantesca distância em relação ao âmago do tema.



$$\Delta_{DE}(t) = -t + 3 - t^{-1}$$

Posfácio

O propósito basilar deste livro é apresentar ao leitor alguns tópicos da Teoria dos Nós, um ramo da Topologia tratado nas esferas elevadas do mundo científico, mas que preserva algumas conexões com a Matemática do ensino básico. Dessa maneira, propõe-se uma leve interligação curricular entre a Geometria e Álgebra do Ensino Fundamental e Médio e a Matemática do Ensino Superior.

A construção deste texto introdutório materializa, na dimensão existencial da docência, a necessidade de resgatar o ensino de Matemática da centralização institucionalizada na solidez dos currículos. Entende o autor, tratar-se de um dever do mestre provocar a constante discussão curricular na esperança de alçar a excelência de aprendizagem. Desta forma, o saber científico é *prima ratio* deste trabalho, cuja inspiração emana do etéreo mundo das abstrações matemáticas e sua aplicabilidade às mais variadas áreas do saber humano, espe-

cificamente, a Teoria dos Nós que estuda uma classe especial de curvas no espaço e detém ligações com a Química, Física e Biologia. Constrói-se, dessa inquietação, um legítimo pioneirismo ao promover o acesso do aluno de Ensino Fundamental e Médio a este livro, que consubstancia com o desejo do autor de inserir na escola básica estudos de ampla competência matemática.

Para concluir, é preciso ressaltar que a enorme complexidade do tema não supera a obstinação de introduzir o saber científico de alto nível nas escolas. Com a criteriosa escolha de tópicos e a devida adaptação didática é perfeitamente possível trabalhar a Teoria de Nós no Ensino Fundamental e Médio, potencializando a aprendizagem em Matemática e também nas demais áreas do conhecimento que integram o percurso acadêmico dos alunos.

Referências Bibliográficas

- [1] KAWAUCHI, A. A survey of knot theory. Basel: Birkhauser, 1996.
- [2] LIVINGSTON, C. Knot Theory. Washington: The Mathematical Association of America, 1993.
- [3] KELLER, M. T. Knot Theory: History and Applications with a Connection to Graph Theory. Fargo, North Dakota, 2004.
- [4] SCHARLEMANN, M. G. Unknotting number one knots are primes. *Invent Math*, n. 1, p. 37–55, 1985.
- [5] KAWAUCHI, A.; YANAGIMOTO, T. Teaching and Learning of Knot Theory in School Mathematics. Osaka, Japan: Springer, 2012. ISBN 978-4-431-54138-7.
- [6] HOSTE, J. The enumeration and classification of knots and links, *Handbook of Knot Theory*, Elsevier, Amsterdam.

- [7] LICKORISH, W. B. R. An Introduction to Knot Theory. Springer, New York, 1991.
- [8] COELHO, Paulo Jorge Ferreira de Oliveira. Templates e Elos de Órbitas Periódicas em Fluxos de Dimensão 3. Dissertação de Mestrado, UNIVERSIDADE DE LISBOA, Lisboa, 2008.
- [9] DIAS, Sónia Manuela Mendes. Introdução à Teoria de Nós. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, 2004.
- [10] SANTOS, Jose Edi-Ackel. Introdução à Teoria dos Nós com Sugestões para o Ensino Básico. 2014. 102p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT), Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão-SE.